

【論文】

4次精度 TLM モデルの開発

岡本 敦^{*1}, 青柳 晃^{*2}

Developments of 4-th Order Accurate TLM Model

Atsusi OKAMOTO Akira AOYAGI

Abstract - Since the usual TLM model is based on the trapezoidal method for the time integration of differential equations for reactance elements of electric circuits, the accuracy of the model is second-order in the time-step length Δt . We consider the improvement of the accuracy of the model by dividing Δt into 3 sections such as $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1$ to obtain fourth-order accurate model. The linear stability analysis and the numerical results are demonstrated.

Key Words : TLM, Numerical Integration, 4-th Order Accurate Method

1. はじめに

時間発展する物理系の多くは、系の変数に対する常微分方程式や偏微分方程式によって記述される。これらの方程式を数値的に解く方法には、有限差分法、有限要素法、スペクトル法など多くのものがあるが、電気回路との類似性によって系をモデル化し、その時間発展を担うキャパシタやインダクタの時間離散化モデルを基にして系の方程式を数値的に解く TLM モデルが開発されている⁽¹⁾。このモデルは、集中回路素子であるキャパシタやインダクタを、分布定数素子である伝送線で模擬するもので、それぞれを2端子で模擬するスタブモデルと、4端子で模擬するリンクモデルがある。

スタブモデルの時間進展式は、キャパシタとインダクタの端子電圧に対して、それぞれ

$$v^i(k+1) = v^r(k)$$

$$v^i(k+1) = -v^r(k)$$

である。ただし、 v^i, v^r は、それぞれ、入射電圧と反射電圧、 k は時間ステップであり、離散時間 Δt を用いて $t = k\Delta t$ と表せる。これらの時間進展式は、キャパシタとインダクタの電圧・電流関係式をそれぞれ台形則により差分化したものと等価であり、時間積分精度は Δt に関して2次のオーダーである。

本研究では、時間ステップ幅 Δt を $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1$ のように3分割した3段の台形則スキームを適用した4次精度の TLM モデルを開発したので、その安定性解析と数値実験結果について報告する。

2. 4次精度3段台形則スキームの導出

時間関数 $x(t)$ に対する常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

の数値解法スキームとして、図1に示すような Δt を時間対称に3分割した3段の台形則スキームを考える。

*1 工学研究科電気工学専攻 M2

*2 電気工学科

$$\begin{aligned} \frac{x(k+\beta_1)-x(k)}{\Delta t} &= \frac{\beta_1}{2}[f(k)+f(k+\beta_1)] \\ \frac{x(k+\beta_1+\beta_2)-x(k+\beta_1)}{\Delta t} &= \frac{\beta_2}{2}[f(k+\beta_1) \\ &\quad +f(k+\beta_1+\beta_2)] \\ \frac{x(k+1)-x(k+\beta_1+\beta_2)}{\Delta t} &= \frac{\beta_1}{2}[f(k+\beta_1+\beta_2) \\ &\quad +f(k+1)] \quad (2) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} f(k) &= f(k\Delta t, x(k\Delta t)) \\ \Delta t &= 2\Delta t_1 + \Delta t_2 = (2\beta_1 + \beta_2)\Delta t \\ 2\beta_1 + \beta_2 &= 1 \end{aligned}$$

ここで、パラメータ α を

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2} + \alpha$$

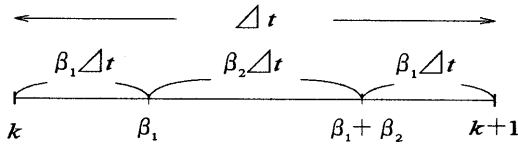


図1 時間ステップ幅 Δt の分割

として、(2)の各式の和をとることによって

$$\begin{aligned} \frac{x(t+\Delta t/2)-x(t-\Delta t/2)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) [f(t+\Delta t/2) + f(t-\Delta t/2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) [f(t+\alpha\Delta t) + f(t-\alpha\Delta t)] \quad (3) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $k \rightarrow k-1/2$, $t = k\Delta t$ とした。

(3)式が微分方程式(1)の離散化式として、 Δt^4 のオーダーの精度をもつようにパラメータ α の値を決定する。(3)式の両辺を t の周りにテーラー展開

すると、右辺は

$$\begin{aligned} f(t) + \frac{1}{16}(1-2\alpha+4\alpha^2+8\alpha^3)\Delta t^2 \frac{d^2}{dt^2} f(t) \\ + O(\Delta t^4) \end{aligned}$$

左辺は

$$f(t) + \frac{1}{24}\Delta t^2 \frac{d^2}{dt^2} f(t) + O(\Delta t^4)$$

となる。これらの第2項を等しいとして

$$24\alpha^3 + 12\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解いて、実数解

$$\alpha = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 2^{1/3} + 2^{-1/3} \right) \cong -0.851207192$$

を得る。これより

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \alpha \cong 1.351207192$$

$$\beta_2 = 2\alpha \cong -1.702414384$$

となる。

3. 安定性解析

3段台形則スキーム(2)の安定性を

$$f(t, x) = -\lambda x$$

として調べてみる⁽²⁾。ただし、 λ は複素定数である。

1段の台形則スキーム

$$x(k+1) - x(k) = -\frac{\lambda \Delta t}{2} [x(k) + x(k+1)]$$

の1ステップあたりの増幅係数 $R(\lambda \Delta t)$ は

$$R(z) = \frac{1-z/2}{1+z/2}$$

で与えられる。ただし、 $z = \lambda \Delta t$ と置いた。従って、

スキーム(2)の増幅係数 $G(z)$ は

$$\begin{aligned} G(z) &= R(\beta_1 z) R(\beta_2 z) R(\beta_1 z) \\ &= \left(\frac{1-\beta_1 z/2}{1+\beta_1 z/2} \right)^2 \frac{1-\beta_2 z/2}{1+\beta_2 z/2} \end{aligned}$$

となる。これから分かるように、 $\text{Re}(z) \geq 0$ して、 $z = -2/\beta_2$ 近傍で局所的に不安定となる。 z が実数の場合の $|G(z)|$ の様子を図2に示す。

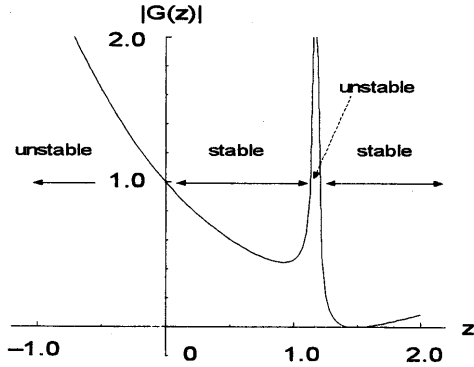


図2 増幅係数 $|G(z)|$

$z = i\theta$ の虚軸上では

$$|G(i\theta)| = 1$$

となり、振幅誤差は0である。このときの位相誤差は

$$\text{phase error} = \arg G(-i\theta) - \theta$$

で与えられる。因みに、1段の台形則スキームの位相誤差は

$$\text{phase error} = \arg R(-i\theta) - \theta$$

で与えられる。図3に、これらの位相誤差の比較を示す。

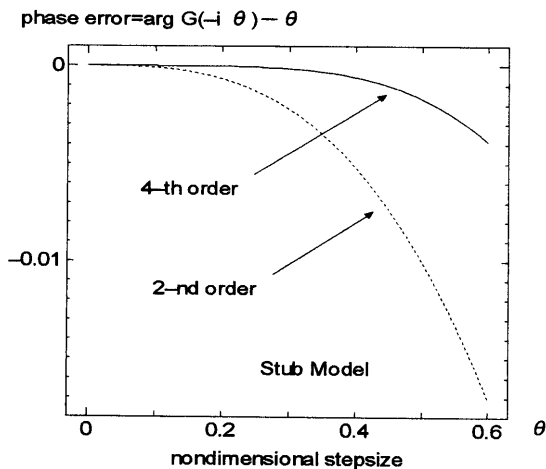


図3 位相誤差の比較

4. 4次精度 TLM モデル

3段の台形則スキーム(2)を、容量 C のキャパシタの電圧・電流関係式

$$C \frac{dv}{dt} = i$$

に適用すると、スタブモデルの時間進展式は

$$\begin{aligned} v^i(k + \beta_1) &= v^r(k) \\ v^i(k + \beta_1 + \beta_2) &= v^r(k + \beta_1) \\ v^i(k + 1) &= v^r(k + \beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる。ただし

$$\begin{aligned} v^i(k) &= [v(k) + Z_1 i(k)] / 2 \\ v^r(k + \beta_1) &= [v(k + \beta_1) + Z_2 i(k + \beta_1)] / 2 \\ v^r(k + \beta_1 + \beta_2) &= [v(k + \beta_1 + \beta_2) \\ &\quad + Z_1 i(k + \beta_1 + \beta_2)] / 2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$Z_1 = \frac{\beta_1 \Delta t}{2C}, \quad Z_2 = \frac{\beta_2 \Delta t}{2C} \quad (6)$$

同様に、インダクタンス L のインダクタの電圧・電流関係式

$$L \frac{di}{dt} = v$$

に対しては

$$\begin{aligned} v^i(k + \beta_1) &= -v^r(k) \\ v^i(k + \beta_1 + \beta_2) &= -v^r(k + \beta_1) \\ v^i(k + 1) &= -v^r(k + \beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。この場合、右辺の反射電圧は式(5)で表されるが、式(6)に代わって

$$Z_1 = \frac{2L}{\beta_1 \Delta t}, \quad Z_2 = \frac{2L}{\beta_2 \Delta t} \quad (8)$$

となる。

リンクモデルの時間進展式は、入力電圧 v_1 、出力電圧 v_2 に対してキャパシタ、インダクタとも

$$\begin{aligned}
v_1^i(k+\beta_1) &= v_2^r(k) \\
v_2^i(k+\beta_1) &= v_1^r(k) \\
v_1^i(k+\beta_1+\beta_2) &= v_2^r(k+\beta_1) \\
v_2^i(k+\beta_1+\beta_2) &= v_1^r(k+\beta_1) \\
v_1^i(k+1) &= v_2^r(k+\beta_1+\beta_2) \\
v_2^i(k+1) &= v_1^r(k+\beta_1+\beta_2)
\end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。この場合、特性インピーダンスは、キャパシタに対しては

$$Z_1 = \frac{\beta_1 \Delta t}{C}, \quad Z_2 = \frac{\beta_2 \Delta t}{C} \quad (10)$$

インダクタに対しては

$$Z_1 = \frac{L}{\beta_1 \Delta t}, \quad Z_2 = \frac{L}{\beta_2 \Delta t} \quad (11)$$

となる。

5. アルゴリズムおよび数値実験結果

簡単な例題として、 $R-L$ 直列回路に電源電圧 $v_S(t)$ を印加したときの過渡現象に適用してみる。スタブモデルの場合、インダクタの端子電圧を v 、電流を i として、計算アルゴリズムは

$$\begin{aligned}
k=0, \quad v &= v_S(0), \quad i=0 \\
k=k+\beta_1, \quad v^i &= -(v+Z_1 i)/2 \\
i &= [v_S(k) - 2v^i]/(Z_1+R) \\
v &= 2v^i + Z_1 i \\
k=k+\beta_2, \quad v^i &= -(v+Z_2 i)/2 \\
i &= [v_S(k) - 2v^i]/(Z_2+R) \\
v &= 2v^i + Z_2 i \\
k=k+\beta_1, \quad v^i &= -(v+Z_1 i)/2 \\
i &= [v_S(k) - 2v^i]/(Z_1+R) \\
v &= 2v^i + Z_1 i
\end{aligned}$$

と書ける。ただし、 Z_1, Z_2 は式 (8) で与えら

れる。リンクモデルは 4 端子で与えられたコンデンサあるいはコイルを 4 端子の伝送線路で模擬する。したがって、入力端と出力端それぞれに端子電圧と電流が伴っている。入力端および出力端における端子電圧と電流をそれぞれ v_1, i_1, v_2, i_2 として、計算アルゴリズムは

$$k=0, \quad v_1 = v_S(0), \quad v_2 = 0, \quad i_1 = i_2 = 0$$

$$k=k+\beta_1, \quad v_1^i = (v_2 - Z_1 i_2)/2$$

$$v_2^i = (v_1 + Z_1 i_1)/2$$

$$i_1 = [v_S(k) - 2v_1^i]/Z_1$$

$$i_2 = 2v_2^i/(Z_1+R)$$

$$v_1 = 2v_1^i + Z_1 i_1$$

$$v_2 = 2v_2^i - Z_1 i_2$$

$$k=k+\beta_2, \quad v_1^i = (v_2 - Z_2 i_2)/2$$

$$v_2^i = (v_1 + Z_2 i_1)/2$$

$$i_1 = [v_S(k) - 2v_1^i]/Z_2$$

$$i_2 = 2v_2^i/(Z_2+R)$$

$$v_1 = 2v_1^i + Z_2 i_1$$

$$v_2 = 2v_2^i - Z_2 i_2$$

$$k=k+\beta_1, \quad v_1^i = (v_2 - Z_1 i_2)/2$$

$$v_2^i = (v_1 + Z_1 i_1)/2$$

$$i_1 = [v_S(k) - 2v_1^i]/Z_1$$

$$i_2 = 2v_2^i/(Z_1+R)$$

$$v_1 = 2v_1^i + Z_1 i_1$$

$$v_2 = 2v_2^i - Z_1 i_2$$

と書ける。 Z_1, Z_2 は式 (11) を用いればよい。

図 4 に、直流電源電圧印加時の 2 次精度と 4 次精度スキームを、 $t=0$ から 5 s まで走らせたときの $t=5s$ 時点における計算精度の比較を示す。 $\Delta \varepsilon$ は電流の計算値と理論値との差の絶対値で、計算条件は、 $v_S=1V$, $R=1\Omega$, $L=1H$ とした。リンクモデルの場合、電流は 1 次電流と 2 次電流の算術平均とした。

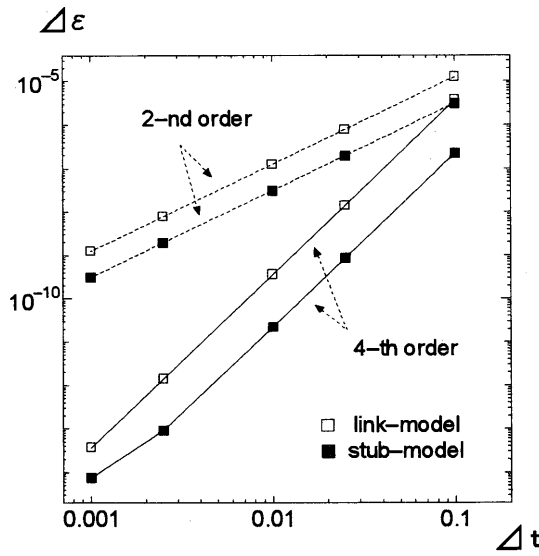


図4 計算精度の比較 (線形)

6. R-C 非線形回路

線形回路での4次精度 TLM モデルの有効性が確認できたので、次に、図5の非線形キャパシタンス $C(v)$ を持つ非線形回路の4次精度 TLM モデルを考える。

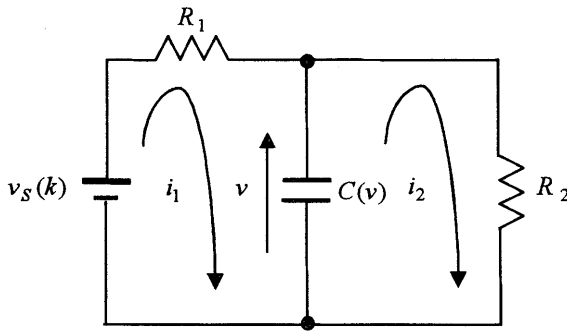


図5 RCR 回路

非線形キャパシタ及び単位キャパシタの端子電圧をそれぞれ v, v_u 、非線形キャパシタンスの特性を $C(v) = C_0 - C_N v$ とする。ただし、 C_0 は線形キャパシタンス、 C_N は非線形係数である。スタブモデルの場合、単位キャパシタの特性インピーダンスは、

$$Z_{cu1} = \frac{\beta_1 \Delta t}{2}, \quad Z_{cu2} = \frac{\beta_2 \Delta t}{2}$$

となる。計算アルゴリズムは

$$k=0, \quad i_1 = i_2 = 0, \quad v_u = v = 0 \\ k = k + \beta_1$$

$$C(v) = C_0 - C_N v$$

$$v_u^i = [v_u + Z_{cu1}(i_1 - i_2)] / 2$$

$$v_{test} = v_u^i / C(v)$$

$$C(v_{test}) = C_0 - C_N v_{test}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})})v_s(k) - 2R_2 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$i_2 = \frac{\frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} v_s(k) + 2R_1 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$v_u = 2v_u^i / C(v_{test}) + Z_{cu1} / C(v_{test})(i_1 - i_2) \\ v = v_u / C(v_{test})$$

ここで、 $v_{test} = v$ として、上の計算を繰り返し $|v - v_{test}| \leq 10^{-15}$ を満たすならば、次のステップに進む。以下同様に考え、

$$k = k + \beta_2$$

$$C(v) = C_0 - C_N v$$

$$v^i = [v_u + Z_{cu2}(i_1 - i_2)] / 2$$

$$v_{test} = v_u^i / C(v)$$

$$C(v_{test}) = C_0 - C_N v_{test}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + \frac{Z_{cu2}}{C(v_{test})})v_s(k) - 2R_2 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu2}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$i_2 = \frac{\frac{Z_{cu2}}{C(v_{test})} v_s(k) + 2R_1 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu2}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$v_u = 2v_u^i / C(v_{test}) + Z_{cu2} / C(v_{test})(i_1 - i_2) \\ v = v_u / C(v_{test})$$

$$k = k + \beta_1$$

$$C(v) = C_0 - C_N v$$

$$v_u^i = [v_u + Z_{cu1}(i_1 - i_2)]/2$$

$$v_{test} = v_u^i / C(v)$$

$$C(v_{test}) = C_0 - C_N v_{test}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})})v_s(k) - 2R_2 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$i_2 = \frac{\frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} v_s(k) + 2R_1 \frac{v_u^i}{C(v_{test})}}{(R_1 + R_2) \frac{Z_{cu1}}{C(v_{test})} + R_1 R_2}$$

$$v_u = 2v_u^i / C(v_{test}) + Z_{cu1} / C(v_{test})(i_1 - i_2)$$

$$v = v_u / C(v_{test})$$

と書ける. リンクモデルの場合の特性インピーダンスは

$$Z_{cu1} = \beta_1 \Delta t, \quad Z_{cu2} = \beta_2 \Delta t$$

となる. 計算アルゴリズムについては省略する.

図 5 の回路の非線形キャパシタにかかる端子電圧の解析解は

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{t - 2 \frac{C_N}{C_0} \tau v}{\tau (1 - 2 \frac{C_N}{C_0} \tau \frac{v_s}{R_1 C_0})} \right] \right\} \quad (12)$$

である. ただし, $\tau = \frac{R_1 R_2 C_0}{R_1 + R_2}$.

式 (12) の解析解 $v(t)$ は

$$f(v) = v - \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{t - 2 \frac{C_N}{C_0} \tau v}{\tau (1 - 2 \frac{C_N}{C_0} \tau \frac{v_s}{R_1 C_0})} \right] \right\} = 0$$

として, ニュートン法による漸化式

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$$

を用いて求めた. このとき, 初期値 v_0 は, 式 (12) の右辺で $v = 0$ としたときの値を用いた. 図 6 に, $v_s = 1V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $C_0 = 1F$, $C_N = 0.2 [F/V]$ としたときの 2 次精度および 4 次精度スキームの, $t = 5s$ 時点における v の計算精度の比較を示す. リンクモデルの場合, 電圧は 1 次電圧と 2 次電圧の算術平均とした.

実験結果より線形回路, 非線形回路での 4 次精度 TLM モデルの有効性が確認できた. 図 6 より, この回路では, スタブモデル, リンクモデルによる誤差の差が殆んどないことが分かる.

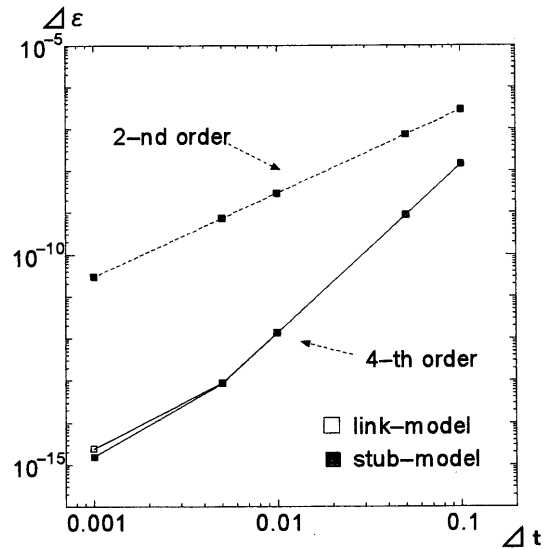


図 6 計算精度の比較 (非線形)

参考文献

- (1) C・クリストポロス, 加川幸雄[訳]: TLM 伝達線路行列法入門 (培風館)
- (2) 牛田明夫, 田中 衛: 電子回路シミュレーション (コロナ社)