九州産業大学国際文化学部紀要　第11号　167—179（1998）

t 分布の BASIC による数値計算

川　口　俊　郎・川　上　弘　泰

（1998年1月21日受理）

緒　　言

t 分布の数値計算用の BASIC プログラムを作成した。その内容は，

(1)　任意の自由度 $\phi \leqq 120$，および任意の両側確率 $0.01 \leqq \alpha \leqq 0.50$ に対する t_α 値の算出。

(2)　任意の自由度 $\phi \leqq 120$，および任意の t_α 値に対する両側確率 α の算出。

などである。

t 分布は二つの正規母集団の母平均の差の推定や検定，相関係数および回帰係数の推定や検定など，t 分布として推計学では多岐にわたって利用されている。

ここで報告するパソコン（富士通：F-BASIC86HG コンパイラ使用）用の BASIC プログラムは，推計学処理の副プログラムとして，容易に主プログラムに組み込むことができる。

1．t 分布[(1), (2)]

t 分布の定義は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を互いに独立な n 個の確率変数とし，これらがそれぞれ規準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うとき，これに対して作成された，(1)式の t なる統計量が従う確率分布を，自由度 $\phi = n$ の t 分布という。

t 分布の確率密度関数は(2)式で定義され，その平均と分散は，それぞれ(3)式で与えられる。ただし，B は β 関数を表す。

t 分布の分布関数，あるいはその下側確率 $F(t;\phi)$ は(4)式で定義され，これに対する上側確率 α は(5)式で算出される。

このときの t 値が，t 分布の100α%点であり，$t(\phi;\alpha)$ または t_α（以下，t 値と略す）で表す。

2．t 分布と F 分布との関係

自由度 (ϕ_1, ϕ_2) の F 分布の確率密度関数は(6)式で定義される。

F 分布の ϕ_1 と ϕ_2 および F を(7)式のようにおき(6)式を変形し，さらに(6)式を $\frac{1}{2}$ すれば，(8)式の F 分布と t 分布との確率密度関数の関係が得られる。

したがって，t 分布は F 分布[3]と同様に，β 分布の漸化式を利用して，数値計算を行うことができる。

$$t=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n}}} \tag{1}$$

$$f(t;\phi)=\frac{1}{\sqrt{\phi}B\left(\frac{1}{2},\frac{\phi}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\phi}\right)^{-\frac{\phi+1}{2}} \quad (-\infty<t<\infty) \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{平均：} E\{t\}=0 \qquad \cdots(\phi>1) \\ \text{分散：} V\{t\}=\frac{\phi}{\phi-2} \cdots(\phi>2) \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$F(t;\phi)=\int_{-\infty}^{t}f(u;\phi)du \tag{4}$$

$$\alpha=1-F(t;\phi)=\int_{t}^{\infty}f(u;\phi)du \tag{5}$$

$$f(F;\phi_1,\phi_2)=\frac{\phi_1^{\frac{\phi_1}{2}}\phi_2^{\frac{\phi_2}{2}}F^{\frac{\phi_1}{2}-1}}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)}(\phi_2+\phi_1F)^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \tag{6}$$

$$\phi_1=1,\quad \phi_2=\phi,\quad F=t_2 \quad (-\infty<t<\infty) \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}f(F;\phi_1,\phi_2)dF=f(t;\phi)dt \tag{8}$$

3．β 分布の漸化式[3]

(8)式の F 分布と t 分布との関係，および(9)式の F 分布と β 分布との関係を考慮して，(10)式のように β 分布の分布関数を $I_x\left(\frac{1}{2},\nu\right)$ とおく。

ここで，ν と x を(11)式のようにおくと，β 分布の公式から I_x の漸化式として(12)式の $I_x\left(\frac{1}{2},\nu+1\right)$ が導かれる。

(12)式で使われた U_x は(13)式で表され，(13)式の形から U_x の漸化式として，(14)式の

九州産業大学国際文化学部紀要　第11号　167―179（1998）

$U_x\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right)$ が導かれる。

また，U_x と t 分布の確率密度関数との関係は，(15)式で与えられる。

さらに，I_x を使用して表した，t 分布の下側確率を(16)式に示す。

ただし，これらの(12)式と(14)式を t 分布の数値計算に適用するためには，(11)式の変換が必要である。

$$f(F; \phi_1, \phi_2)dF = f_B\left(x; \frac{\phi_1}{2}, \frac{\phi_2}{2}\right)dx \tag{9}$$

$$I_x\left(\frac{1}{2}, \nu\right) = \int_0^x \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \nu\right)} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\nu-1}dx \quad (0 \leqq x \leqq 1, \nu > 0) \tag{10}$$

$$\nu = \frac{\phi}{2}, \quad x = \frac{t^2}{\phi + t^2} \tag{11}$$

$$I_x\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right) = I_x\left(\frac{1}{2}, \nu\right) + \frac{1}{\nu}U_x\left(\frac{1}{2}, \nu\right) \tag{12}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2}, \nu\right) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \nu\right)} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\nu} \tag{13}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right) = U_x\left(\frac{1}{2}, \nu\right)\frac{\frac{1}{2}+\nu}{\nu}(1-x) \tag{14}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2}, \frac{\phi}{2}\right) = f(t; \phi)\,|t| \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &F(t; \phi) = 0.5 + \frac{\mathrm{sign}(t)}{2} I_x\left(\frac{1}{2}, \frac{\phi}{2}\right) \\ &\qquad \mathrm{sign}(t) = \begin{cases} +1 \cdots (t \geqq 0) \\ -1 \cdots (t < 0) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

4．t 分布関数の両側確率 α の数値計算

t 分布関数の両側確率 α の数値計算法は，最初に(4)式の下側確率 $F(t; \phi)$ を計算する。

この計算には，初期値として自由度 ϕ が奇数の場合は，(17.1)式と(17.2)式，自由度 ϕ が偶数の場合には，(18.1)式と(18.2)式を選択して使用する。

つぎに，β 分布の漸化式(12)と(14)式を利用して，下側確率を計算する。これを(5)式で上側確率 α に変換後，2倍して t 分布関数の両側確率 α（2α を新たに α とする。）を算出する。

5. t 分布の%点の t 値の数値計算

t 分布の%点の t 値の数値計算法として，(5)式を逆に解き t を α の関数として，導くことはできない。

1）自由度 ϕ が2以下の場合

自由度 ϕ が1の場合は(19.1)式，自由度 ϕ が2の場合は(19.2)式を使用して，t 値を算出する。

2）自由度 ϕ が3以上の場合

この場合の数値計算法は，正規近似式を使用して第1近似値を求め，これを初期値としてNewton法を繰り返して精度を高め，t 値を算出する。

E を(20)式のようにおき，Newton法の第1近似値を，$E>0.5$ の場合は(21)式を使用，$E\leqq 0.5$ の場合は(22)式を使用して算出する。

ただし，(21)式の u_α は正規分布の上側(片側)確率 $\frac{\alpha}{2}$ に対する u 値，(22)式の $\Gamma\left(\frac{1+\phi}{2}\right)$ および $\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)$ は Γ 関数を表す。

E 値の大小の判別が必要な理由は，(23)式の範囲内では(21)式は使用できないから，これを避けるためである。

Newton法の公式およびその収束条件を，(24)式および(25)式に示す。最初の x_1 は(21)式または(22)式から算出された，自由度 ϕ および両側確率 α に対する t 値の第1近似値である。

$F(x_1)$ は x_1 から算出された下側確率，P は与えられた両側確率から算出された下側確率，$f(x_1)$ は x_1 に対する確率密度で(15)式から求められる。

x_1 と x_2 との関係が(25)式の収束条件を満足しないときは，x_2 を新たな x_1 としておきかえ，収束条件を満足するまでNewton法の計算を繰り返して精度を高め，t 値を算出する。

ここで必要な Γ 関数の数値計算法，および正規分布の u 値の算出法などは，既報[(3),(4)]で詳述したので，本報では省略する。

$$I_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{x} \qquad (17.1)$$

$$U_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\sqrt{x(1-x)} \qquad (17.2)$$

$$I_x\left(\frac{1}{2},1\right)=\sqrt{x} \qquad (18.1)$$

$$U_x\left(\frac{1}{2}, 1\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x}\,(1-x) \tag{18.2}$$

$$t_\alpha=\begin{cases} \tan\{\pi(0.5-\alpha)\} \cdots\cdots (\phi=1) & (19.1) \\ \sqrt{\dfrac{2(1-2\alpha)^2}{1-(1-2\alpha)^2}} \cdots\cdots (\phi=2) & (19.2) \end{cases}$$

表 1　t 分布の数値計算の副プログラム

```
100 REM ; 主プログラム
110  CLEAR : CLS : DEFINT I-N : DEFSNG A-H : DEFSNG O-Z
120  API=3.14159
130 REM ; 自由度φ(=ADFR), 両側確率α(=AQ1)からｔ値(ATT)を算出
140  ADFR=5! : AQ1=0.05 : AQ=AQ1/2! : GOSUB *PTDIST
150  PRINT USING "ｔ値=##.###" ; ATT
160 REM : 自由度φ(=ADFR), ｔ値(=ATO)から両側確率α(=AAL)を算出
170  ADFR=5! : ATO=2.571 : GOSUB *TDIST : AAL=(1!-DPP)*2!
180  PRINT USING "ｔ－α=##.###" ; AAL
190  END
2000 REM ; 副プログラム
2010 REM ; ｔ分布の下側確率
2020 *TDIST
2030  DSGN=1! : IF ATO<0! THEN DSGN=-1!
2040  ND=FIX(ADFR) : DTT=ATO*ATO : DX=DTT/(ADFR+DTT)
2050  IF ND MOD 2 = 0 THEN 2070
2060  DP=1!-2!*ATN(SQR((1!-DX)/DX))/API : DU=SQR(DX*(1!-DX))/API : IBID=1 : GOTO 2080
2070  DP=SQR(DX) : DU=SQR(DX)*(1!-DX)/2! : IBID=2
2080  IF IBID=ND THEN 2120
2090  FOR JBJD=IBID TO ND-2 STEP 2
2100    DB=CSNG(JBJD) : DP=DP+2!*DU/DB : DU=DU*(1!+DB)/DB*(1!-DX)
2110  NEXT JBJD
2120  DD=DU/ABS(ATO) : DPP=.5+DSGN*DP/2!
2130  RETURN
2140 REM ; ｔ分布の％点
2150 *PTDIST
2160  APIS=1.77245 : ADFR2=ADFR/2!
2170  IF ADFR=1! THEN 2270
2180  IF ADFR=2! THEN 2280
2190  AP=1!-AQ : GOSUB *PNORM
2200  AE=(1!-1!/(4!*ADFR))^2-AYQ*AYQ/(2!*ADFR) : IF AE<=.5 THEN 2300
2210  ATO=AYQ/SQR(AE)
2220  KA=1
2230  GOSUB *TDIST
2240  ATT=ATO-(DPP-AP)/DD : IF ABS(ATO-ATT)<.000001*ABS(ATT) THEN 2320
2250  KA=KA+1 : IF KA=>30 THEN 2320
2260  ATO=ATT : GOTO 2230
2270  ATT=TAN(API*(.5-AQ)) : GOTO 2320
2280  AC=1! : IF AQ>.5 THEN AC=-1!
2290  AQ2=(1!-2!*AQ)^2 : ATT=SQR(2!*AQ2/(1!-AQ2))*AC : GOTO 2320
2300  GX=ADFR2 : GOSUB *GAMMA : AGA1=GA : GX=ADFR2+.5 : GOSUB *GAMMA : AGA2=GA
2310  ATO=SQR(ADFR)/(APIS*AQ*ADFR*AGA1/AGA2)^(1!/ADFR) : GOTO 2220
2320  RETURN
```

$$E=\left(1-\frac{1}{4\phi}\right)^2-\frac{u_\alpha^2}{2\phi} \tag{20}$$

$$\tilde{t}=E^{-\frac{1}{2}}u_\alpha \qquad \cdots\cdots(E>0.5) \tag{21}$$

$$\hat{t}_\alpha=\phi^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\phi}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\alpha\phi\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\phi}}\cdots\cdots\left(\begin{array}{c}E\leqq 0.5\\ \phi,\alpha:\text{小}\end{array}\right) \tag{22}$$

$$u_\alpha\geqq\sqrt{2\phi\left(1-\frac{1}{4\phi}\right)^2} \tag{23}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{F(x_i)-P}{f(x_i)} \quad (i=0,1,2,\cdots) \tag{24}$$

$$\left|\frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}}\right|<10^{-6} \tag{25}$$

6．t 分布の BASIC プログラムの説明

t 分布の両側確率 α，および t 値の数値計算を単精度で行うための，副プログラムを表 1 に示す。

t 分布の数値計算には，(22)式に含まれる Γ 関数の数値計算用の副プログラム GAMMA，および正規分布の下側確率 $\phi(u)$ を算出するための副プログラム NORM，並びに正規分布の u 値を算出するための副プログラム PNORM などが使用される。

以上の Γ 関数および正規分布の数値計算用の副プログラムは，文番号2320以降に続くが，これらは既報[(3), (4)]で説明したから，表 1 では記載を省略した。

表 1 の主プログラムの文番号100～190は，目的に応じて任意に設定できるが，ここでは簡単な形式を例として示した。

また，表 1 の BASIC プログラムの 1 行の長さは，255桁まで記載することができるが，ここでは印刷の都合上短縮して作成した。

1）副プログラム TDIST

副プログラム TDIST は t 分布の自由度 ϕ，および t 値に対する(4)式の下側確率 $F(t;\phi)$ を算出する。下側確率から両側確率 α への変換は，主プログラムで行う。

この数値計算には，自由度 ϕ の奇数・偶数に応じて，(17.1)式～(18.2)式の初期値を選択し，つぎに β 分布の漸化式(12)式および(14)式を利用して，(4)式の下側確率 $F(t;\phi)$ を算出する。

ただし，t 分布に β 分布の漸化式を適用する際には，(11)式の変換が必要である。

2030：t 値の正負に対応して，(16)式の sign(t) を DSGN＝1 または DSGN＝－1 とし

て設定する。

2040：入力した実数型の自由度 $\phi(=\text{ADFR})$ を整数型の自由度 ND に変換し，(11)式の x に対応する DX を計算する。

2050：自由度 ND が偶数の場合は，2070に分岐し，奇数の場合には，つぎに移る。

2060：自由度 ND が奇数の場合である。I_x と U_x の初期値を(17.1)式と(17.2)式で計算する。つぎに，奇数の場合の基準値である 1 を設定し，2080に分岐する。

2070：自由度 ND が偶数の場合である。I_x と U_x の初期値を(18.1)式と(18.2)式で計算する。つぎに，偶数の場合の基準値である 2 を設定し，つぎに移る。

2080：自由度 ND が，基準値の 1 または 2 に等しい場合は，2120に分岐する。

2090～2110：必要な自由度 ND まで，I_x および U_x を計算する。

2090：I_x および U_x の漸化式を計算する際の，反復数を（ND－2）回と設定する。

2100：(12)式および(14)式の漸化式を使用して，$I_x\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right)$ および $U_x\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right)$ を計算する。

2120：(15)式を使用して，(2)式の確率密度を計算する。(16)式を使用して，(4)式の下側確率を計算する。

170：この主プログラムで(5)式に従い，下側確率 DPP を上側（片側）確率に変換後，これを 2 倍して両側確率 AAL を算出する。

2）副プログラム PTDIST

副プログラム PTDIST は，t 分布の両側確率 α に対する％点の t 値を算出する。

2160：(22)式の Newton 法の第 1 近似値の計算に必要な，APIS$=\sqrt{\pi}$ および ADFR2$=\frac{\phi}{2}$ の設定を行う。

2170：自由度 $\phi(=\text{ADFR})$ が 1 の場合は，2270に分岐する。

2180：自由度 ADFR が 2 の場合は，2280に分岐する。

2190：Newton 法の第 1 近似値を算出する計算式を選択する条件となる，(20)式の E 値の計算に必要な，正規分布の u_α 値を副プログラム PNORM を使用して計算する。

2200：(20)式の E 値を計算し，これを AE とすす。AE$\leqq$0.5 が成立する場合は2300に分岐して(22)式を計算する。成立しない場合には，つぎに移る。

2210：AE$>$0.5 が成立する場合である。Newton 法の第 1 近似値として，(21)式を計算する。

2220：Newton 法の反復数の初期値を設定する。

2230～2260：Newton 法を繰り返す。Newton 法の手法は既報[3]で説明したから，ここ

では簡単に述べる。

2230：(21)式または(22)式の Newton 法の第1近似値 ATO に対する下側確率を，副プログラム TDIST を使用して計算する。

2240：収束値を 10^{-6} と設定し，(24)式の Newton 法の公式に従い，(25)式の収束判定を行う。収束した場合は，計算を終了させる。

2250：収束しない場合は反復数 KA を加算し，反復数 KA が設定した30回を超えた場合は，計算を終了させる。

2260：収束しない場合は使用した ATT を ATO に移し，新たに ATT を設定し，収束するまで Newton 法を繰り返す。

2270：自由度 ADFR が1の場合は，(19.1)式に従い t 値の計算を行う。

2280：t 値の正負に対応する係数 AC を設定する。上側(片側)確率が $\frac{\alpha}{2} \leqq 0.5$ の場合は，AC=1 とし，上側確率が $\frac{\alpha}{2} > 0.5$ の場合には，AC=−1 する。

表2 t 分布表

ϕ \ α	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.819	63.651	636.040
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.849
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

2290：自由度 ADFR が 2 の場合は，(19.2)式に従い t 値の計算を行う。この計算には 2280で設定した，係数 AC を使用する。

2300：AE≦0.5 が成立する場合である。(22)式に含まれる Γ 関数，$\Gamma\left(\frac{1+\phi}{2}\right)$ および $\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)$ を，既報(3)の副プログラム GAMMA を使用して計算する。

2310：Newton 法の第 1 近似値として，(22)式の $\hat{t}_{\alpha}$(=ATO) を計算し，2220に戻り Newton 法を繰り返す。

140：この主プログラムで，自由度 ADFR および両側確率 AQ1 に対する t 値を算出する。ただし，入力した両側確率は，上側（片側）確率に変換後，PTDIST で使用する。

7．t 分布表

表 2 に t 分布の副プログラム PTDIST を使用して算出した，306個の t 値を示す。

表 3　判別値 E の範囲

ϕ \ α	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.335	0.208	0.025	−0.259	−0.790	−1.358	−2.143	−2.755	−4.851
2	0.652	0.589	0.497	0.355	0.089	−0.195	−0.587	−0.893	−1.941
3	0.764	0.722	0.661	0.567	0.389	0.200	−0.062	−0.266	−0.964
4	0.822	0.790	0.745	0.674	0.541	0.399	0.202	0.050	−0.475
5	0.857	0.832	0.795	0.738	0.632	0.518	0.361	0.239	−0.180
6	0.880	0.859	0.829	0.782	0.693	0.598	0.467	0.365	0.016
7	0.897	0.879	0.853	0.813	0.737	0.655	0.543	0.456	0.156
8	0.910	0.894	0.871	0.836	0.769	0.698	0.600	0.524	0.262
9	0.920	0.906	0.886	0.854	0.795	0.732	0.645	0.577	0.344
10	0.928	0.915	0.897	0.869	0.815	0.759	0.680	0.619	0.409
11	0.934	0.923	0.906	0.880	0.832	0.780	0.709	0.653	0.463
12	0.940	0.929	0.914	0.890	0.846	0.799	0.733	0.682	0.508
13	0.944	0.935	0.921	0.899	0.858	0.814	0.754	0.707	0.545
14	0.948	0.939	0.926	0.906	0.868	0.827	0.771	0.728	0.578
15	0.952	0.943	0.931	0.912	0.877	0.839	0.787	0.746	0.606
16	0.955	0.947	0.935	0.918	0.884	0.849	0.800	0.762	0.631
17	0.957	0.950	0.939	0.922	0.891	0.858	0.812	0.776	0.652
18	0.960	0.953	0.943	0.927	0.897	0.866	0.822	0.788	0.672
19	0.962	0.955	0.946	0.931	0.903	0.873	0.831	0.799	0.689
20	0.964	0.957	0.948	0.934	0.908	0.879	0.840	0.809	0.704
21	0.966	0.959	0.951	0.937	0.912	0.885	0.847	0.818	0.719
22	0.967	0.961	0.953	0.940	0.916	0.890	0.854	0.827	0.731
23	0.968	0.963	0.955	0.943	0.920	0.895	0.861	0.834	0.743
24	0.970	0.965	0.957	0.945	0.923	0.899	0.867	0.841	0.754
25	0.971	0.966	0.959	0.947	0.926	0.903	0.872	0.847	0.764
26	0.972	0.967	0.960	0.949	0.929	0.907	0.877	0.853	0.773
27	0.973	0.968	0.962	0.951	0.931	0.910	0.881	0.859	0.781
28	0.974	0.970	0.963	0.953	0.934	0.914	0.886	0.864	0.789
29	0.975	0.971	0.964	0.955	0.936	0.917	0.890	0.868	0.796
30	0.976	0.972	0.965	0.956	0.938	0.919	0.893	0.873	0.803
40	0.982	0.979	0.974	0.967	0.954	0.940	0.920	0.905	0.852
60	0.988	0.986	0.983	0.978	0.969	0.960	0.947	0.936	0.901
120	0.994	0.993	0.991	0.989	0.985	0.980	0.973	0.968	0.951

ただし，自由度 ϕ が $\phi=\infty$ の場合の t 値は，正規分布 $N(0,1^2)$ の u 値と一致する。この場合は，表１では記載を省略したが，正規分布の副プログラム PNORM[(4)]を使用して，u 値を算出した。

表２に示したように，t 値の算出範囲は，横軸は９個の両側確率 $\alpha=0.50\sim0.001$ とし，縦軸は34個の自由度 $\phi=1\sim\infty$ とした。

８．考　察

１）副プログラム PNORM の反復数

表１では記載を省略したが，正規分布の副プログラム PNORM は，t 分布の副プログラム PTDIST の文番号2190で，下側確率から u 値を算出するために使用される。

この副プログラム PNORM で設定された，収束値 10^{-7} および反復数 KB は，既報[(4)]で説明したように，u 値の算出に影響を及ぼす。

両側確率 α が $\alpha=0.001$，自由度 ϕ が $\phi\geqq15$ の範囲内の t 値の算出に必要な u 値は，

表４　副プログラム PTDIST の収束値10^{-6}に対する反復数

ϕ ＼ α	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
3	3	3	3	4	5	5	30	5	3
4	3	3	3	3	4	5	5	4	3
5	3	3	3	3	4	4	30	5	4
6	2	3	3	3	3	4	6	5	4
7	2	3	3	3	3	4	4	6	30
8	2	2	3	3	3	3	4	5	5
9	2	2	3	3	3	3	5	5	30
10	2	2	3	3	3	3	4	30	7
11	2	2	2	3	3	3	4	5	30
12	2	2	2	3	3	3	30	30	5
13	2	2	2	3	3	3	3	30	30
14	2	2	2	3	3	3	30	4	5
15	2	2	2	2	3	3	3	3	30
16	2	2	2	2	3	3	30	4	4
17	2	2	2	2	3	3	3	3	4
18	2	2	2	2	3	3	30	30	30
19	2	2	2	2	3	3	3	3	5
20	2	2	2	2	3	3	3	3	3
21	2	2	2	2	2	3	4	30	30
22	2	2	2	2	3	3	4	3	4
23	2	2	2	2	3	3	3	30	3
24	2	2	2	2	2	3	4	4	30
25	2	2	2	2	3	3	4	30	30
26	2	2	2	2	3	30	3	30	3
27	2	2	2	2	2	3	3	3	30
28	2	2	2	2	2	3	4	4	30
29	2	2	2	2	2	3	4	5	30
30	2	2	2	2	2	3	30	5	3
40	2	2	2	2	2	30	3	30	4
60	2	2	2	2	2	2	3	30	3
120	2	2	2	2	3	2	2	30	30
∞	1000	1000	10	10	20	39	85	150	961

副プログラム PNORM の反復数 KB を KB=100 と設定した場合は u=4.518, 反復数 KB を KB=1000 と設定した場合には u=3.291 と算出され，両者は一致しない。

例えば，t(15, 0.001) 値の算出に u=4.518 を使用した場合は，文番号2240の Newton の公式に対応して，(24)式の t 値の第1近似値は，x_1(=ATO) =5.519 となる。

反復数が3回に達すると，下側確率 DPP は $F(x_3)\fallingdotseq 1$, 確率密度 DD は $f(x_3)=3.0\times 10^{-24}$，算出された t 値は x_4=(=ATT)=1.7×10^{20}，さらに x_4 を2乗するために，ATT の桁数は BASIC で許される範囲を超え，t 値の計算ができなくなる。

これに反して，u=3.291 の場合には t 値は収束する。したがって，反復数 KB は KB =1000 と設定しなければならない。

2）判別値 E の範囲

t 値を算出するための Newton 法の第1近似値は，(20)式の E に対応する，副プログラム PTDIST の文番号2200の AE 値の範囲に従い，(21)式または(22)式から算出される。

AE≦0.5 の範囲内の Newton 法の第1近似値の計算には，Γ 関数を含む(22)式が使用

表5　副プログラム PTDIST の最大反復数（KA=30）に対する収束値

No.	両側確率 α	自由度 ϕ	t 値	収束値 $\varepsilon\times 10^{-5}$
1	0.050	26	2.056	0.116
2	0.050	40	2.021	0.106
3	0.020	3	4.541	0.221
4	0.020	5	3.365	0.163
5	0.020	12	2.681	0.125
6	0.020	14	2.624	0.118
7	0.020	16	2.583	0.111
8	0.020	18	2.552	0.112
9	0.020	30	2.457	0.107
10	0.010	10	3.169	0.218
11	0.010	12	3.055	0.211
12	0.010	13	3.012	0.412
13	0.010	18	2.878	0.191
14	0.010	21	2.831	0.185
15	0.010	23	2.807	0.187
16	0.010	25	2.787	0.368
17	0.010	26	2.779	0.180
18	0.010	40	2.704	0.176
19	0.010	60	2.660	0.341
20	0.010	120	2.617	0.656
21	0.001	7	5.408	2.054
22	0.001	9	4.781	1.785
23	0.001	11	4.437	1.623
24	0.001	13	4.221	3.039
25	0.001	15	4.073	1.440
26	0.001	18	3.922	1.362
27	0.001	21	3.819	1.311
28	0.001	24	3.745	1.273
29	0.001	25	3.725	1.261
30	0.001	27	3.690	1.241
31	0.001	28	3.674	1.233
32	0.001	29	3.659	1.225
33	0.001	120	3.373	2.134

される。

表3に示したように，自由度 ϕ に対して，AE≦0.5が成立する範囲は，例えば $\alpha=0.001$ では $\phi\leqq 11$ である。したがって，この範囲内でのAE値の算出には，(22)式を使用しなければならない。

既報[3]で説明したように，$x(=\phi)$ が5以上の Γ 関数の数値計算式には，x のベキ乗の計算式 $x^{(x-0,5)}$ が含まれる。この x の制限値は使用したコンパイラ（富士通：F-BASIC 86 HG）では，$x\leqq 27$ $(27^{26.5}=8.5\times10^{37})$ である。

t 分布の数値計算では，Γ 関数の計算に使用される，x（自由度 ϕ）の最大値は11である。この場合には，$x=\dfrac{1+\phi}{2}=\dfrac{1+11}{2}\leqq 27$ の条件が成立し，(22)式を使用することができる。

3）副プログラムPTDISTの収束値 10^{-6} に対する反復数

副プログラムPTDISTの文番号2240の収束値 10^{-6} に対する文番号2250の実測された反復数KAを表4に示す。

ただし，自由度 ϕ が $\phi=\infty$ の場合は，正規分布の副プログラムPNORMの収束値 10^{-7} に対する，反復数KBを参考のために示した。

また，自由度 ϕ が $\phi=1\sim2$ の範囲内では，副プログラムPTDISTは使用されないから，表4の自由度 ϕ は3から記載した。

表4に示したように，自由度 ϕ が $\phi=3\sim120$，両側確率 α が $\alpha=0.10\sim0.50$ の範囲内では，反復数KAはすべて5回以下である。

設定した反復数KAが30回を必要とした，両側確率 α の範囲は，$\alpha=0.001\sim0.05$ である。この範囲内では，124個の t 値のうち33個が最大反復数（KA＝30）でも，設定した収束値 10^{-6} に達しなかった。

4）副プログラムPTDISTの最大反復数（KA＝30）に対する収束値

表5に副プログラムPTDISTの反復数KAを最大のKA＝30とした場合に，実測された収束値を示す。

表5に示したように，両側確率 α が $\alpha=0.05\sim0.01$ の範囲内の最大収束値は 6.56×10^{-6}，両側確率 α が $\alpha=0.001$ の場合の最大収束値は 3.039×10^{-5} と算出された。

収束値を 10^{-6}，および 3.039×10^{-5} と設定した場合の t 値を比較すると，両者は一致した。

また，収束値を 3.039×10^{-5} と設定した場合の反復数は，全て8回以下であった。

したがって，収束値を 3.039×10^{-5} と設定しても，t 分布表の作成は可能である。

結　語

一般に，表 2 に記載されていない t 値で，自由度 ϕ が30以下の場合は，直接一次補間法で計算し，自由度 ϕ が30以上の場合には，$\frac{120}{\phi}$ を用いる一次補間法で t 値を計算できる。

ここで報告した t 分布の数値計算用の BASIC 副プログラムは，任意の自由度 ϕ に対する t 値を自動的に計算することができ，以上の一次補間法は不要である。

自由度が小さい t 分布の中心付近の確率密度は，正規分布よりも小さく，両端の部分の確率密度は，正規分布よりも大きくなる。

また，自由度が大きくなると，正規分布に近づき，自由度無限大では，正規分布と一致する。

したがって，t 分布は通常，自由度が50以下の少数例のデータに対する，推定や検定に適用される。

参　考　文　献

(1) 大村　平，今田直孝：推測統計の FORTRAN，16-17，39-48，58-67，オーム社，1972.

(2) 近藤良夫，舟阪　渡：技術者のための統計的方法，58-61，66-67，632，共立出版，1971.

(3) 川口俊郎，川上弘泰：F 分布のBASICによる数値計算，九州産業大学国際文化学部紀要，第 9 号，151-166，1997.

(4) 川口俊郎，川上弘泰：正規分布および χ^2 分布の BASIC による数値計算，九州産業大学国際文化学部紀要，第 8 号，185-203，1997.