一元配置法のBASICプログラム

川　上　弘　泰

（1995年5月10日受理）

緒　　言

一元配置法は完備型の実験計画法に属し，一つの因子（例えば，温度，圧力など）の各水準（温度の場合は，10℃，20℃など）について何回かの繰返し実験を行い，得られたデータについて分散分析を用いて解析を加え，因子の種類（母数因子か変量因子）に応じた各種推計量（母分散，母平均，母平均の差など）の検定や推定を行う方法である。[(1),(2)]

ここで報告するパソコン（富士通：FMR-60）用のBASICプログラムは，一元配置法に関する各種推計量の検定や推定を行うために作成され，これらの解析に必要な t 分布，F 分布および χ^2 分布などの諸統計量[(3)]もプログラミングされている。

Ⅰ．　一元配置法の理論

A．　分散分析前の解析法

実験によって得られたデータには，採用した因子とその組合せによる影響，および実験の場の影響などが入っている。因子の影響を主効果，因子の組合せによる影響を交互作用効果と称し，この両者をあわせて要因効果（あるいは単に効果）という。

さらに要因効果は，母数型と変量型に区別される。母数型とは主効果や交互作用効果が一定の値で示される場合で，主効果が母数型である因子を母数因子という。

変量型とは要因効果が，ある確率分布に従う確率変数とみなされる場合で，その因子を変量因子という。

データ解析の方法は，母数因子の場合と変量因子の場合とでは異なる。

1．　母数因子の場合

帰無仮説を H_0，各水準の母平均を μ_{Ai} とすれば，

$$H_0 : \mu_{A1}=\mu_{A2}=\cdots=\mu_{Ai}=\cdots=\mu_{Aa} \tag{1}$$

が成立するかどうか（母平均の一様性）の検定を目的とし，さらに各水準における母平均およびその差の検定や推定を行う。

2．　変量因子の場合

母平均 μ，母分散 σ_A^2 の母集団を対象として，

$$H_0 : \sigma_A^2=0 \tag{2}$$

の検定を行うことを目的とする。各水準における母平均やその差の検定や推定を行うことは無意味で，全体としての母平均 μ や母分散 σ_A^2（一元配置法では級間分散）を推定するために行う。

ただし，母数因子の場合は帰無仮説(1)と(2)のいずれを検定しても同じであるが，変量因子の場合には帰無仮説(1)の検定は無意味で帰無仮説(2)の検定のみが有効である。

3．実験順序などの完全ランダム化法

一元配置法では，母数因子および変量因子のいずれの場合でも，表 1（各水準におけるデータの繰返数が等しい場合），および表 2（各水準におけるデータの繰返数が異なる場合）などのデータが，ランダムに得られるように実験順序などをランダム化する。

表 1　一元配置法のデータ（繰返数が等しい場合）
（因子 A：a 水準，各水準の繰返数：n）

因子水準	デ	ー	タ			
A_1	x_{11}	x_{12}	‥	x_{1j}	‥	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	‥	x_{2j}	‥	x_{2n}
：	：	：	‥	：	‥	：
A_i	x_{i1}	x_{i2}	‥	x_{ij}	‥	x_{in}
：	：	：	‥	：	‥	：
A_a	x_{a1}	x_{a2}	‥	x_{aj}	‥	x_{an}

表 2　一元配置法のデータ（繰返数が異なる場合）
（因子 A：a 水準，各水準の繰返数：n_i）

因子水準	デ	ー	タ			
A_1	x_{11}	x_{12}	‥	x_{1j}	‥	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	‥	x_{2j}	‥	x_{2n_2}
：	：	：	‥	：	‥	：
A_i	x_{i1}	x_{i2}	‥	x_{ij}	‥	x_{in_i}
：	：	：	‥	：	‥	：
A_a	x_{a1}	x_{a2}	‥	x_{aj}	‥	x_{an_a}

一元配置法によるデータの解析手順を，図 1 の流れ図に従って説明する。

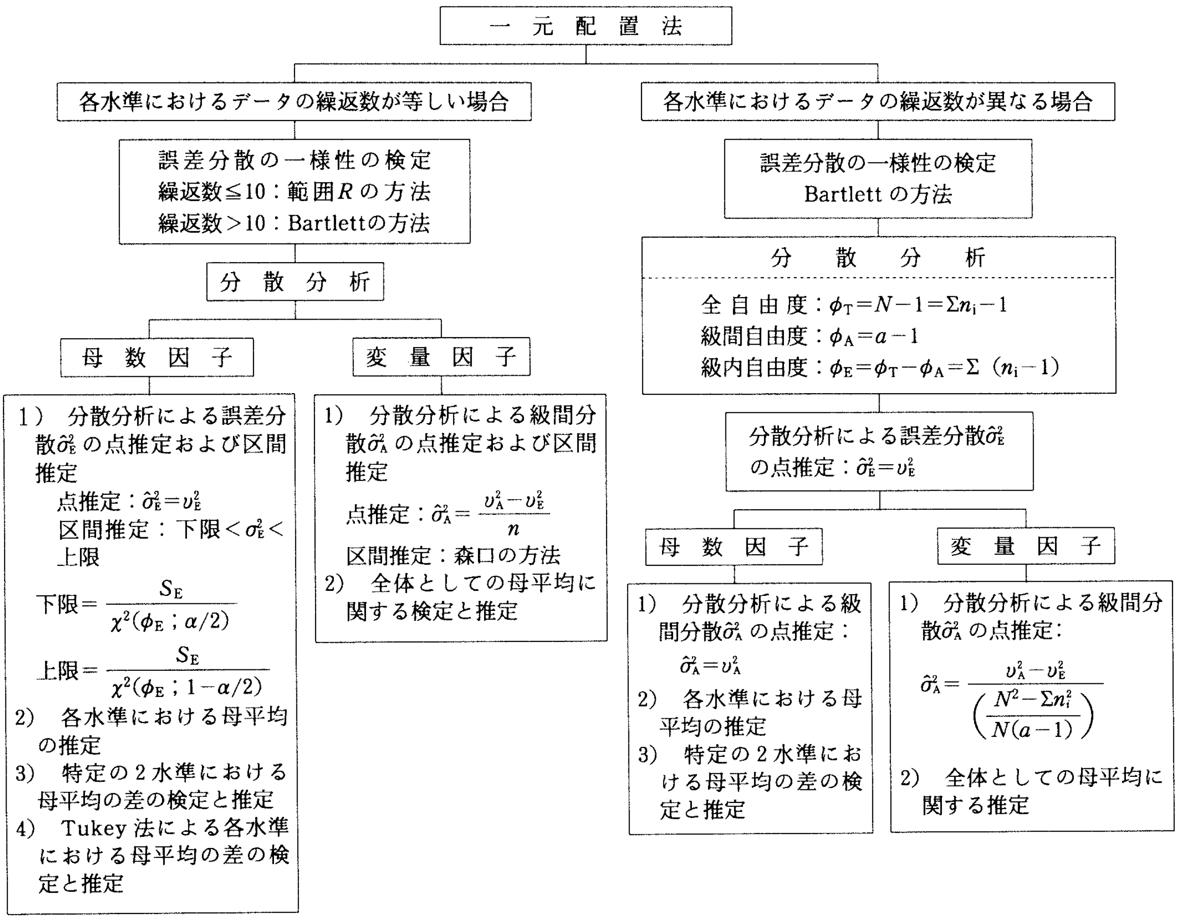

図 1　一元配置法の流れ図

4. 誤差分散の一様性の検定とその大きさの推定

4・1 範囲 R の方法

誤差分散の一様性の検定方法は，各水準におけるデータの繰返数の大小，および繰返数が等しいか異なるかによって区別される。

繰返数 n が等しく $n \leqq 10$ の場合は，母集団のバラツキに関する最も簡単な統計量である，範囲 R の方法を用い，$n>10$ の場合には Bartlett の方法を使用する。つぎに範囲 R[(1)] による方法の解析手順を説明する。

1) 範囲 R（$=x_{\max}-x_{\min}$）を各水準ごとに R_{i} として求める。

2) R_{i} の平均値 $\bar{R}$ を計算する。

3) 繰返数 n の場合の上限値 D_4（$n=2$～10の範囲），下限値 D_3（$n=7$～10の範囲）および n に対応して定まる係数 d_2 などを，プログラミングされている「$\bar{x}-R$ 管理図用係数表」[(1)] から求める。

4) $D_4\bar{R}$ および $D_3\bar{R}$ を計算する。

5) $R_{\mathrm{i}} \geqq D_4\bar{R}$ または $R_{\mathrm{i}} \leqq D_3\bar{R}$ が成立する R_{i} が存在すれば，「誤差分散は一様である」を棄却できる。

6) 異常な R_{i} がなければ，$(\bar{R}/d_2)^2$ を以て誤差分散 σ_{E}^2 の推定値とする。この推定値は後述する分散分析において算出される級内分散 v_{E}^2 とほぼ一致する。

4・2 Bartlett の方法

繰返数 n が10より大きいか，または繰返数が異なる場合は Bartlett[(1)] の方法を使用する。

誤差分散の一様性の検定は，各水準の誤差分散を σ_{i}^2 として，(3)式の帰無仮説 H_0 を有意水準 $\alpha(0.05)$ について，(4)式の検定基準を用いて，(5)式の検定規則 R の検定を行う。

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots\cdots=\sigma_a^2 \tag{3}$$

$$\chi_0^2=-\frac{1}{c}\Sigma\phi_{\mathrm{i}}\ \ell n\frac{v_{\mathrm{i}}^2}{v^2} \tag{4}$$

$$\mathrm{R} : \chi_0^2 \geqq \chi^2(a-1\,;\alpha) \tag{5}$$

$$\text{ただし，}\ \phi_{\mathrm{i}}=n_{\mathrm{i}}-1 \tag{4.1}$$

$$v_i^2=\frac{\Sigma(x_{\mathrm{ij}}-\bar{x}_{\mathrm{i}})^2}{\phi_{\mathrm{i}}} \tag{4.2}$$

$$v^2=\frac{\Sigma\phi_{\mathrm{i}}v_i^2}{\Sigma\phi_{\mathrm{i}}} \tag{4.3}$$

$$c=1+\frac{1}{3(a-1)}\left(\Sigma\frac{1}{\phi_{\mathrm{i}}}-\frac{1}{\Sigma\phi_{\mathrm{i}}}\right) \tag{4.4}$$

(5)式が成立すれば「誤差分散は一様である」を棄却できる。

ただし，n_{i} は各水準におけるデータ数，(4.1) 式の ϕ_{i} は各水準に対する自由度，(4.2) 式の v_{i}^2 は各水準における不偏分散，(4.3) 式の v^2 は誤差分散（級内分散），(4.4) 式の c は χ_0^2 値の χ^2 分布への近似を良好にするための修正値，a は水準数を表す。

(5)式の「R:」の記号は，つぎに示されている数式が成立すれば，帰無仮説 H_0 を棄却でき

ることを意味する。

また誤差分散の大きさ σ_E^2 の推定値 υ^2 は，(4.3) 式から明らかなように分散分析で算出される級内分散 υ_E^2 である。

B.　分散分析

一元配置法では，母数因子および変量因子のいずれの場合でも，表３に示した分散分析の F 検定までの解析法は同一である。

表３ 分 散 分 析 表

要 因	平 方 和	自 由 度	不偏分散	分散比 F_0	棄却限界値
級間変動 A	$S_A=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2$	$\phi_A=a-1$	$\upsilon_A^2=\dfrac{S_A}{\phi_A}$	$F_0=\dfrac{\upsilon_A^2}{\upsilon_E^2}$	$F\ (\phi_A,\ \phi_E\ ;\alpha)$
級内変動 E (誤差)	$S_E=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$	$\phi_E=a\ (n-1)$ $*\phi_E=\Sigma\ (n_i-1)$	$\upsilon_E^2=\dfrac{S_E}{\phi_E}$		
合 計 T	$S_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2$	$\phi_T=an-1$ $*\phi_T=\Sigma n_i-1$			

x_{ij}：A_i 水準で観測され第 j 番目に記載されたデータ，$\bar{x}_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}/n$（$A_i$ 水準の平均値）

$\bar{\bar{x}}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}/an$（全データの平均値）

＊：各水準におけるデータの繰返数が異なる場合の自由度，n_i：A_i 水準のデータ数

F 検定では(2)式の帰無仮説 H_0 を有意水準 α (0.05) について，(6)式の検定規則 R を用いて検定を行う。

$$R\ :\ F_0=\frac{\upsilon_A^2}{\upsilon_E^2}\geqq F(\phi_A,\ \phi_E\ ;\alpha) \tag{6}$$

(6)式が成立すれば，(2)式の帰無仮説「級間分散は 0 (H_0 : $\sigma_A^2=0$)」を棄却し，次に述べる分散分析後の解析を行う。

ただし，F (ϕ_A, ϕ_E; α) は，第１の自由度が $\phi_1=\phi_A$，第２の自由度が $\phi_2=\phi_E$，有意水準 α (0.05) の F 分布の F 値である。

また各水準のデータの繰返数 n が異なる場合は，繰返数が等しい場合と区別するために表３では＊印を付けて示し，さらにこの場合には平方和の Σ の n は n_i と置換えて計算する。

C.　分散分析後の解析法

1.　繰返数が等しい場合

1・1　母数因子の場合

1)　誤差分散の点推定および区間推定

誤差分散 $\hat{\sigma}_E^2$ の点推定は(7)式，区間推定は(8)式を用いて上限値と下限値が推定される。

$$\text{点推定：}\ \hat{\sigma}_E^2=\upsilon_E^2 \tag{7}$$

$$\text{区間推定：}\ \frac{S_E}{\chi^2(\phi_E\ ;\alpha/2)}<\sigma_E^2<\frac{S_E}{\chi^2(\phi_E\ ;1-\alpha/2)} \tag{8}$$

（信頼度：$1-\alpha$）

ただし，$\hat{\sigma}_E^2$ の上付 Λ は σ_E^2 の点推定値を意味し，υ_E^2 は分散分析の級内分散（誤差分散）を表す。区間推定の S_E は級内平方和，χ^2（ϕ_E; $\alpha/2$）と χ^2（ϕ_E; $1-\alpha/2$）は自由度 ϕ_E，有意水準 $\alpha/2$（$\alpha=0.05$）および $1-\alpha/2=0.975$ の χ^2 分布の χ^2 値である。

2) 各水準における母平均の推定

各水準における母平均の点推定は(9)式，信頼区間は(10)式を用いて推定される。

$$\text{点推定：}\mu_{Ai}=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}{n} \tag{9}$$

$$\text{区間推定：}\bar{x}_i\pm t(\phi_E;\alpha)\sqrt{\frac{\upsilon_E^2}{n}} \tag{10}$$

（信頼度：$1-\alpha$）

ただし，(10)式の t（ϕ_E；α）は自由度 ϕ_E，有意水準 α の t 分布の t 値を示す。推定した信頼区間は標準偏差，99%信頼区間，95%信頼区間および90%信頼区間である。

3) 特定の 2 水準における母平均の差の検定と推定

因子 A の第 p 水準と第 q 水準の母平均の差の有意性を知るために，(11)式の帰無仮説 H_0 の検定を，(12)式の検定規則 R を用いて行う。

$$H_0:\mu_{Ap}=\mu_{Aq} \tag{11}$$

$$R:|t_0|=\frac{|\bar{x}_{p\cdot}-\bar{x}_{q\cdot}|}{\sqrt{\frac{2\upsilon_E^2}{n}}}\geqq t(\phi_E;\alpha) \tag{12}$$

$$\text{ただし，}\bar{x}_{p\cdot}=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{pj}}{n}\qquad(\bar{x}_{p\cdot}:A_p\text{ 水準の平均値})$$

(12)式が成立すれば，特定の 2 水準における母平均の差の推定を(13)式で行う。この検定で設定した有意水準 α は0.01と0.05，推定した信頼区間の種類は1・1〜2)と同じである。

$$(\bar{x}_{p\cdot}-\bar{x}_{q\cdot})\pm t(\phi_E;\alpha)\sqrt{\frac{2\upsilon_E^2}{n}} \tag{13}$$

この方法のように，各水準の全ての組合せについて母平均の差の検定を行うことは，一つの組合せに関する検定の第一種の過誤が α であることを前提とした近似的な方法で，全体として第一種の過誤が α であることは保証されていない。

4) Tukey の方法による各水準における母平均の差の検定と推定

a 個の水準 A_1〜A_a における母平均のうちから，A_i 水準（母平均 μ_{Ai}）と A_i' 水準（母平均 μ_{Ai}'）の組合せについて，全体としての有意性が第一種の過誤 α となるように，(14)式の帰無仮説 H_0 を有意水準 α（0.05）について，(15)式の検定規則 R を用いて検定を行う。

$$H_0:\mu_{Ai}=\mu_{Ai}' \tag{14}$$

$$R:|q_0|=\frac{|\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{i\cdot}'|}{\sqrt{\frac{\upsilon_E^2}{n}}}\geqq q(a,\phi_E;\alpha) \tag{15}$$

ただし，$q(a,\ \phi_E;\ \alpha)$ は自由度 $\phi_1=a$，$\phi_2=\phi_E$，有意水準 $\alpha(0.05)$ の Student 化された範囲と呼ばれるものの上側 100α %点[1]で，これも自動的に計算できるようにプログラミングされている。

(15)式が成立すれば，a 個の母平均 $\mu_{A1}\sim\mu_{Aa}$ の各組合せに対し，全体としての有意水準 α を0.05と設定して検定を行う。

各水準における母平均の差の推定を(16)式で行う。推定した信頼区間は，標準偏差および95%信頼区間である。

$$(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{i.}')\pm q(a,\ \phi_E;\alpha)\sqrt{\frac{\upsilon_E^2}{n}} \tag{16}$$

1・2　変量因子の場合

1)　級間分散の点推定および区間推定

級間分散の点推定 $\hat{\sigma}_A^2$ は(17)式で算出され，この推定の自由度 ϕ^* は，(18)式の Satterthwaite の方法で近似的に求められる。

ただし，誤差分散の点推定および区間推定は母数因子の場合と同じである。

$$\text{点推定：}\hat{\sigma}_A^2=\frac{\upsilon_A^2-\upsilon_E^2}{n} \tag{17}$$

$$\text{自由度：}\phi^*=\frac{(\upsilon_A^2-\upsilon_E^2)^2}{\dfrac{(\upsilon_A^2)^2}{\phi_A}+\dfrac{(\upsilon_E^2)^2}{\phi_E}} \tag{18}$$

級間分散の区間推定は，最も近似の程度が良いと評価されている(19)式の森口の方法を採用し，有意水準 α (0.05) について上限値と下限値の推定を行う。

ただし，F $(\phi_A,\ \infty\ ;1-\alpha/2)$ および F $(\phi_A,\ \infty\ ;\alpha/2)$ の F 分布の F 値は，(19.1) 式の F 分布と χ^2 分布との関係式を用いて，有意水準 α (0.975) および α (0.025) に対する χ^2 分布の χ^2 値を算出，これを F 値に変換するようにプログラミングされている。

$$\left.\begin{aligned}\text{上限}&=\frac{\upsilon_A^2}{n}\left\{\frac{1}{F(\phi_A,\ \infty\ ;1-\alpha/2)}-\frac{\upsilon_E^2}{\upsilon_A^2}+b_U\left(\frac{\upsilon_E^2}{\upsilon_A^2}\right)^2\right\}\\ \text{下限}&=\frac{\upsilon_A^2}{n}\left\{\frac{1}{F(\phi_A,\ \infty\ ;\alpha/2)}-\frac{\upsilon_E^2}{\upsilon_A^2}-b_L\left(\frac{\upsilon_E^2}{\upsilon_A^2}\right)^2\right\}\end{aligned}\right] \tag{19}$$

$$\text{ここに，}b_U=\frac{1}{\phi_E}\left\{\frac{\phi_A-2}{2}-\frac{\phi_A F(\phi_A,\ \infty\ ;1-\alpha/2)}{2}\right\}\times F(\phi_A,\ \infty\ ;1-\alpha/2)$$

$$b_L=\frac{1}{\phi_E}\left\{\frac{\phi_A F(\phi_A,\ \infty\ ;\alpha/2)}{2}-\frac{\phi_A-2}{2}\right\}\times F(\phi_A,\ \infty\ ;\alpha/2)$$

$$\text{ただし，}F(\phi,\ \infty\ ;\alpha)=\frac{\chi^2(\phi,\ \alpha)}{\phi} \tag{19.1}$$

2)　全体としての母平均に関する検定と推定

変量因子の場合に全体としての母平均 μ が，任意の μ_0 と等しいとする(20)式の帰無仮説 H_0 の検定を，(21)式の検定規則 R を用いて行う。

全体としての母平均の点推定は(22)式，母平均の信頼区間は(23)式で推定される。

ただし，N はデータの総数を示す。この検定と推定で設定した有意水準 α は0.01，0.05および0.10である。

$$H_0 : \mu = \mu_0 \tag{20}$$

$$R : |t_0| = \frac{|\bar{\bar{x}} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{v_A^2}{N}}} \geqq t(\phi_A ; \alpha) \tag{21}$$

$$\text{点推定：} \hat{\mu} = \bar{\bar{x}} \tag{22}$$

$$\text{区間推定：} \bar{\bar{x}} \pm t(\phi_A ; \alpha)\sqrt{\frac{v_A^2}{N}} \tag{23}$$

2．繰返数が異なる場合

2・1　母数因子の場合

1)　誤差分散の点推定

誤差（級内）分散の点推定 $\hat{\sigma}_E^2$ は，(24)式のように分散分析で得られた級内分散で推定される。

$$\text{点推定：} \hat{\sigma}_E^2 = v_E^2 \tag{24}$$

2)　各水準における母平均の推定

前述の繰返数が等しい場合の母平均の点推定を求めた(9)式，および区間推定を算出した(10)式の両式について，等しい繰返数 n を異なる繰返数 n_i と置換え，各々(25)式と(26)式とする。

$$\text{点推定：} \mu_{Ai} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i} \tag{25}$$

$$\text{区間推定：} \bar{x}_i \pm t(\phi_E ; \alpha)\sqrt{\frac{v_E^2}{n_i}} \tag{26}$$

（信頼度：$1-\alpha$）

この場合も推定した信頼区間は標準偏差，99％信頼区間，95％信頼区間および90％信頼区間である。

3)　特定の2水準における母平均の差の検定と推定

因子Aの第 p 水準（繰返数 n_p）と第 q 水準（繰返し数 n_q）に対する，母平均の差の有意性に関する，(27)式の帰無仮説 H_0 の検定を，(28)式の検定規則 R を用いて行う。

(28)式が成立すれば，特定の2水準における母平均の差の推定を(29)式で行う。この検定の有意水準 α は0.01と0.05，推定した信頼区間の種類は前述の2・1～2)と同じである。

$$H_0 : \mu_{Ap} = \mu_{Aq} \tag{27}$$

$$R : |t_0| = \frac{|\bar{x}_{p\cdot} - \bar{x}_{q\cdot}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_p} + \frac{1}{n_q}\right) v_E^2}} \geqq t(\phi_E ; \alpha) \tag{28}$$

$$(\bar{x}_{p\cdot}-\bar{x}_{q\cdot}) \pm t(\phi_E;\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{n_p}+\frac{1}{n_q}\right)v_E^2} \tag{29}$$

2・2 変量因子の場合

変量因子の場合は母数因子の場合と異なり，各水準における母平均，ならびにその差についての検定や推定を行うことは無意味である。

この場合には級間分散の推定，および全体としての母平均の推定を行う。

1) 級間分散の点推定

級間分散の点推定 $\hat{\sigma}_A^2$ は，分散分析から得られた級間分散 v_A^2 および級内分散 v_E^2 を用いて，(30)式で推定される。

$$点推定：\hat{\sigma}_A^2=\frac{v_A^2-v_E^2}{\left(\dfrac{N^2-\Sigma n_i^2}{N(a-1)}\right)} \tag{30}$$

2) 全体としての母平均に関する推定

全体としての母平均の点推定は(31)式，母平均の信頼区間は(32)式で推定され，推定した信頼区間の種類は2・1～2)と同じである。

$$点推定：\bar{\bar{x}}=\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}}{N} \tag{31}$$

$$区間推定：\bar{\bar{x}} \pm t(\phi_A;\alpha)\sqrt{\frac{v_A^2}{N}} \tag{32}$$

II. 入力形式

入力データの作成は，一元配置の BASIC プログラムとは分離して作成，計算する際に [CHAIN MERGE] 文で呼び出し，メモリー上の一元配置のプログラムと結合させて実行する。

データの入力開始番号は，プログラムの最終文番号 (6290) 以降となる (7000) から始める。

表4 一元配置法のデータの入力形式

```
7000  REM；各水準のデータの繰返数が等しい場合
7010  DATA  4…………………………………………………………水準数
7020  DATA  5,5,5,5……………………………………………………各水準のデータ数
7030  DATA  24.0,24.0,25.0,29.0,23.0………………………… 第1水準
7040  DATA  21.0,24.0,21.0,26.0,20.0………………………… 第2水準
7050  DATA  19.0,18.0,21.0,17.0,21.0………………………… 第3水準
7060  DATA  21.0,19.0,18.0,18.0,23.0………………………… 第4水準
7070  REM；各水準のデータの繰返数が異なる場合
7080  DATA  5…………………………………………………………水準数
7090  DATA  7,6,6,7,5………………………………………………各水準のデータ数
7100  DATA  630.0,650.0,640.0,660.0,610.0,590.0,660.0………第1水準
7110  DATA  690.0,550.0,650.0,580.0,570.0,560.0………………第2水準
7120  DATA  630.0,480.0,540.0,550.0,580.0,520.0………………第3水準
7130  DATA  680.0,670.0,630.0,610.0,540.0,640.0,560.0………第4水準
7140  DATA  580.0,600.0,650.0,680.0,700.0……………………第5水準
7150  DATA  999………………………………………………………データ終了
```

表 4 のデータは，各水準におけるデータの繰返数が等しい場合，および異なる場合の 2 種類のデータを連続して計算する例である。

文番号7010：水準数は 4 水準。

文番号7020：各水準ごとのデータ数。

文番号7030：第 1 水準のデータ。

(以下略)

文番号7150：データの終了を表す数値。

なお，このプログラムでは水準数は20水準まで，一つの水準におけるデータの繰返数は200個まで入力可能である。

Ⅲ．出力形式

A．繰返数が等しい場合

表 4 の入力データで繰返数が等しい場合の文番号 (7010～7060) に対応する，表 5 の出力形式について順次説明する。

1．範囲 R の方法による誤差分散の一様性の検定とその大きさの推定

検定と推定の理論は 4・1 で説明したが，この例では繰返数 $n=5$ であるから，D_3 ($n=7$ ～10の範囲) は使えず D_4 ($n=2$～10の範囲) のみから一様性の検定，およびその大きさの推定を4・1～6) の数式から算出する。

2．分散分析表

帰無仮説(2)式の検定は，本報では F_0 値と F 値を比較する(6)式を使わず，F_0 値から直接その100α%点 (有意水準) を算出，この数値を以て帰無仮説棄却の可否を検定する。

この例では有意水準は0.29%であるから，＊印 2 個 (有意水準 1%以下) を付けて，帰無仮説 (級間分散は 0) を棄却できる。すなわち，各水準の母平均は異なることを意味する。

3．誤差分散の点推定および区間推定 (母数因子の場合)

誤差分散の点推定は(7)式，区間推定は(8)式を用いて上限値と下限値を推定する。

4．各水準における母平均の推定 (母数因子の場合)

母平均の点推定は(9)式，区間推定は(10)式を用いて推定値を算出する。

繰返数が等しい場合には，(10)式から明らかなように各水準の標準偏差，99%信頼区間，95%信頼区間および90%信頼区間の数値は全て同一となる。

5．特定の 2 水準における母平均の差の検定 (母数因子の場合)

6 組の組合せについて帰無仮説(11)式の検定を，(12)式の検定規則 R を用いて行う。

帰無仮説(11)式の検定は，本報では t_0 値と t 値を比較する(12)式を使わず，t_0 値から直接その100α%点 (有意水準) を算出，この数値を以て帰無仮説棄却の可否を検定する。

この例では，有意水準が 1%以下であれば＊印 2 個，5%と 1%の間であれば＊印 1 個を付けて有意水準を表示する。

6．特定の 2 水準における母平均の差の推定 (母数因子の場合)

6 組の組合せについて母平均の差の推定を(13)式で行い，推定した信頼区間の種類は A.～4.と同じである。

また繰返数が等しい場合には，(13)式から明らかなように各信頼区間の数値は全て同一と

表5 繰返数が等しい場合の出力形式

1. 範囲 R の方法による誤差分散の一様性の検定とその大きさの推定

$D_4 \times \bar{R} = 2.115 \times 5.250 = 11.10$

$D_4 \times \bar{R} < R_i$……個数＝0 〔誤差分散 σ_E^2 は一様である〕

d_2 による誤差分散の推定；$\hat{\sigma}_E^2 = (\bar{R}/d_2)^2 = (5.250/2.326)^2 = 5.094$

2. 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	F_0 値		$F_0-100\alpha$ (%)
級間 A	$S_A=106.0$	$\phi_A=3$	$\upsilon_A^2=35.333$	7.17	＊＊	0.29
級内 E	$S_E=78.8$	$\phi_E=16$	$\upsilon_E^2=4.925$	〔帰無仮説 $\sigma_A^2=0$ を棄却できる〕		
合計 T	$S_T=184.8$	$\phi_T=19$				

3. 誤差分散の点推定および区間推定（母数因子の場合）

点 推 定；$\hat{\sigma}_E^2 = \upsilon_E^2 = 4.925$

区間推定；$\hat{\sigma}_E^2$ の上限＝11.408～$\hat{\sigma}_E^2$ の下限＝2.732

4. 各水準における母平均の推定（母数因子の場合）

水準	個数	平均値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
1	5	25.0	0.99	2.90	2.10	1.73
2	5	22.4	0.99	2.90	2.10	1.73
3	5	19.2	0.99	2.90	2.10	1.73
4	5	19.8	0.99	2.90	2.10	1.73

5. 特定の2水準における母平均の差の検定（母数因子の場合）

平均値の組合	差の絶対値	t_0 値	$t_0-100\alpha$ (%)	検定
1 VS. 2	2.60	1.85	8.25	（有意差なし）
1 VS. 3	5.80	4.13	0.08	＊＊（有意差あり）
1 VS. 4	5.20	3.70	0.19	＊＊（有意差あり）
2 VS. 3	3.20	2.28	3.67	＊（有意差あり）
2 VS. 4	2.60	1.85	8.25	（有意差なし）
3 VS. 4	0.60	42.75	67.47	（有意差なし）

6. 特定の2水準における母平均の差の推定（母数因子の場合）

平均値の組合	差の絶対値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
1 VS. 2	2.60	1.40	4.10	2.98	2.45
1 VS. 3	5.80	1.40	4.10	2.98	2.45
1 VS. 4	5.20	1.40	4.10	2.98	2.45
2 VS. 3	3.20	1.40	4.10	2.98	2.45
2 VS. 4	2.60	1.40	4.10	2.98	2.45
3 VS. 4	0.60	1.40	4.10	2.98	2.45

7. Tukey の方法による各水準における母平均の差の検定と推定（母数因子の場合）

平均値の組合	差の絶対値	標準偏差	95%信頼区間	検定
1 VS. 2	2.60	0.99	4.02	（有意差なし）
1 VS. 3	5.80	0.99	4.02	＊（有意差あり）
1 VS. 4	5.20	0.99	4.02	＊（有意差あり）
2 VS. 3	3.20	0.99	4.02	（有意差なし）
2 VS. 4	2.60	0.99	4.02	（有意差なし）
3 VS. 4	0.60	0.99	4.02	（有意差なし）

8. 級間分散の点推定および区間推定（変量因子の場合）

点 推 定：$\hat{\sigma}_A^2=6.082$ Satterthwaiteの自由度 $\phi^*=2.21$

区間推定：$\hat{\sigma}_A^2$ の上限＝97.3～$\hat{\sigma}_A^2$ の下限＝1.17

9. 全体としての母平均に関する検定と推定（変量因子の場合）

$H_0: \mu=\mu_0$, $R: |21.6-\mu_0| \geqq$ (99%, 95%, 90%の信頼区間値)

上式が成立すれば，有意水準 $\alpha=0.01$, 0.05, 0.10 に応じて帰無仮説 H_0 を棄却できる。

区間推定

平均値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
21.6	1.33	7.76	4.23	3.13

なる。

7.　Tukey の方法による各水準における母平均の差の検定と推定（母数因子の場合）

6 組の組合せについて帰無仮説(14)式の検定を，(15)式の検定規則 R を用いて行う。

この例では，二つの母平均の差の絶対値が4.02（(15)式から求めた95%信頼区間値）よりも大きければ，＊印 1 個を付け有意水準 5%の有意差を表示する。ただし，有意水準 1%については検定を省略した。

区間推定は標準偏差および95%信頼区間を(16)式で推定する。これらの各数値も(16)式から明らかなように全て同一となる。

この Tukey の方法では，全体として第一種の過誤が有意水準 α（0.05）として保証されるため，95%信頼区間値は4.02となり，6.の95%信頼区間値2.98よりも大きく算出される。

8.　級間分散の点推定および区間推定（変量因子の場合）

級間分散の点推定は(17)式，その自由度は(18)式，区間推定は(19)式の森口の方法を採用し，有意水準 α（0.05）について区間の推定を行う。

9.　全体としての母平均に関する検定と推定（変量因子の場合）

変量因子の場合に全体としての母平均 μ が，任意の μ_0 と等しいとする(20)式の帰無仮説を 3 種類の有意水準 α（0.01，0.05，0.10）について，(21)式の検定規則 R を用いて検定を行う。

この例では，$|\mu-\mu_0|\geqq 7.76$ の場合は 1%の有意水準，$4.23\leqq|\mu-\mu_0|<7.76$ の場合は 5%の有意水準，$3.13\leqq|\mu-\mu_0|<4.23$ の場合は10%の有意水準で「有意差あり」と検定する。

母平均の点推定は(22)式，信頼区間は(23)式で推定され，推定した信頼区間の種類はA.～4.と同じである。

B.　繰返数が異なる場合

表 4 の入力データで繰返数が異なる場合の文番号（7080～7140）に対応する，表 6 の出力形式について順次説明する。

1.　Bartlett の方法による誤差分散の一様性の検定

この例は繰返数が異なる場合であるから，Bartlett の方法を適用する。

この方法は帰無仮説(3)式を有意水準 α（0.05）について，(4)式の検定基準を用いて，(5)式の検定規則 R の検定を行う。

帰無仮説(3)式の検定は，本報では χ_0^2 値と χ^2 値を比較する(5)式を使わず，χ_0^2 値から直接その 100α%点（有意水準）を算出，この数値を以て帰無仮説棄却の可否を検定する。

この例では有意水準は51.84%であるから，(3)式の帰無仮説「誤差分散は一様である」を棄却できない。

2.　分散分析表

この例では有意水準は2.23%であるから，＊印 1 個（$5\%\geqq 100\alpha>1\%$）を付けて，帰無仮説「誤間分散は 0」を棄却できる。すなわち，各水準の母平均は異なることを意味する。

3.　誤差分散の点推定（母数因子の場合）

誤差分散の点推定は(24)式のように，分散分析で得られた級内分散で推定される。

4.　各水準における母平均の推定（母数因子の場合）

母平均の点推定は(25)式，区間推定は(26)式を用いて推定値を算出する。

(26)式から明らかなように，繰返数が等しい水準では各信頼区間の数値は全て同一とな

表6 繰返数が異なる場合の出力形式

1. Bartlett の方法による誤差分散の一様性の検定

自由度＝4 $\chi_0^2=3.24$ $\chi_0^2-100\alpha(\%)=51.84$ 〔誤差分散$\hat{\sigma}_E^2$は一様である〕

2. 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	F_0 値	$F_0-100\alpha$ (%)
級間 A	$S_A=31933.8$	$\phi_A=4$	$v_A^2=7983.46$	3.43	＊ 2.23
級内 E	$S_E=60537.1$	$\phi_E=26$	$v_E^2=2328.35$	〔帰無仮説$\hat{\sigma}_A^2=0$ を棄却できる〕	
合計 T	$S_T=92471.0$	$\phi_T=30$			

3. 誤差分散の点推定（母数因子の場合）

点推定；$\hat{\sigma}_E^2=v_E^2=2328.35$

4. 各水準における母平均の推定（母数因子の場合）

水準	個数	平均値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
1	7	634.29	18.24	50.68	37.49	31.11
2	6	600.00	19.70	54.74	40.49	33.60
3	6	550.00	19.70	54.74	40.49	33.60
4	7	618.57	18.24	50.68	37.49	31.11
5	5	642.00	21.58	59.96	44.36	36.81

5. 特定の2水準における母平均の差の検定（母数因子の場合）

平均値の組合	差の絶対値	t_0 値	$t_0-100\alpha(\%)$	検定
1 VS. 2	34.29	1.277	21.28	（有意差なし）
1 VS. 3	84.29	3.140	0.42	＊＊（有意差あり）
1 VS. 4	15.71	6.093	54.76	（有意差なし）
1 VS. 5	77.14	2.730	78.70	（有意差なし）
2 VS. 3	50.00	1.795	8.43	（有意差なし）
2 VS. 4	18.57	0.692	49.52	（有意差なし）
2 VS. 5	42.00	1.437	16.25	（有意差なし）
3 VS. 4	68.57	2.554	1.68	＊（有意差あり）
3 VS. 5	92.00	3.149	0.41	＊＊（有意差あり）
4 VS. 5	23.43	0.829	41.45	（有意差なし）

6. 特定の2水準における母平均の差の推定（母数因子の場合）

平均値の組合	差の絶対値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
1 VS. 2	34.29	26.85	74.60	55.18	45.79
1 VS. 3	84.29	26.85	74.60	55.18	45.79
1 VS. 4	15.71	25.79	71.67	53.02	43.99
1 VS. 5	77.14	28.25	78.51	58.08	48.19
2 VS. 3	50.00	27.86	77.41	57.27	47.52
2 VS. 4	18.57	26.85	74.60	55.18	45.79
2 VS. 5	42.00	29.22	81.19	60.06	49.84
3 VS. 4	68.57	26.85	74.60	65.18	45.79
3 VS. 5	92.00	29.22	81.19	60.06	49.84
4 VS. 5	23.43	28.25	78.51	58.08	48.19

7. 級間分散の点推定（変量因子の場合）

点推定；$\hat{\sigma}_A^2=915.45$

8. 全体としての母平均に関する推定（変量因子の場合）

平均値	標準偏差	99%信頼区間	95%信頼区間	90%信頼区間
609.032	16.048	73.885	44.556	34.211

る。

5. 特定の 2 水準における母平均の差の検定（母数因子の場合）

10組の組合せについて帰無仮説(27)式の検定を，(28)式の検定規則 R を用いて行う。

帰無仮説(27)式の検定は，A.～5.と同じように t_0 値と t 値を比較する(28)式を使わず，t_0 値から直接その100α%点（有意水準）を算出，この数値を以て帰無仮説棄却の可否を検定する。

有意水準の程度は，A.～5.と同様に＊印の数で表示する。

6. 特定の 2 水準における母平均の差の推定（母数因子の場合）

10組の組合せについて母平均の差の推定を(29)式で行い，推定した信頼区間の種類はB.～4.と同じである。

7. 級間分散の点推定（変量因子の場合）

級間分散の点推定は(30)式で推定を行う。

8. 全体としての母平均に関する推定（変量因子の場合）

全体としての母平均の点推定は(31)式，母平均の信頼区間は(32)式で推定され，推定した信頼区間の種類はB.～4.と同じである。

Ⅳ. 考　　察

1. 特定の 2 水準における母平均の差の検定

観測される母集団の水準数が三つ以上の場合，特定の 2 水準における母平均の差の検定方法は，

(1) これを単に二つの母集団とみなし，その差の検定を近似的に行う簡便法[4]（これを以下，SC と略す）。

(2) 本報の一元配置法に基礎を置いた多重比較法（これを以下，MC と略す）。

(3) 繰返数が等しい場合に適用される厳密な多重比較法である Tukey の方法（これを以下，TC と略す）。

以上の 3 種類に分類されるが，一因子実験のデータ解析の手段としては，解析が複雑な(2)と(3)よりも，(1)の簡便法が多用される。

この 3 種類の方法を表 5（5.～7.）の水準 2 と水準 3 の組合せについて比較する。

ただし，SC では水準が二つしかない場合の v_E^2（＝4.75）を(12)式に用いて t_0 を算出，MC の場合は(12)式から t_0 を算出，TC の場合は(15)式から q_0 を算出する。

SC：$|t_0|=2.32>t\ (8\,;\,0.05)=2.31$　＊（有意差あり）

MC：$|t_0|=2.28>t\ (16\,;\,0.05)=2.12$　＊（有意差あり）

TC：$|q_0|=3.23<q\ (4, 16\,;\,0.05)=4.05$　（有意差なし）

SC と MC では，有意水準 α（0.05）で，「有意差あり」と検定されるが，TC では「有意差なし」との厳密な結論に導かれる。これは TC では，全体として第一種の過誤が有意水準 α（0.05）として保証されるためである。

以上の比較検討からも明らかなように，特定の 2 水準における母平均の差の検定には，

多重比較法を採用し特に繰返数が等しい場合には，Tukey の方法を適用して厳密な検定を行うべきである。

2．一元配置法の応用例

入試の面接評点のバラツキの補正法として，この一元配置法の利用を試みる。

いま多数の面接室があり，各面接室に面接委員が3名配属され面接を行うと仮定する。

(1) 一つの面接室の3名の面接委員の採点のバラツキを，水準3の一元配置と想定，その誤差分散の一様性の検定を行う。一様とみなされない場合は，特定の水準（面接委員）の評点にのみ適当な補正を加える。

この検定を全ての面接室で行い，各面接室での評点の誤差分散が一様であることを確認する。

(2) つぎに，一つの面接室を1水準とみなし，面接室の数に対応する水準数の一元配置と想定，その誤差分散の一様性の検定を行う。一様とみなされない場合は，(1)と同様に適当な補正を加える。

以上の(1)と(2)で誤差分散の一様性が確認された場合には，各面接室の評点の比較を試みることに意味があるといえる。

結　　語

三つ以上の水準から構成される母集団に関して，母分散および母平均ならびに母平均の差などの各種推計量の検定と推定を行う BASIC プログラムを作成した。

このプログラムは，各水準における繰返数が等しい場合と異なる場合の両者に関して，母数因子または変量因子に関係なく処理でき，特に繰返数が等しい場合には，厳密な検定法である Tukey の方法を利用できる。

さらに，このプログラムでは検定と推定に必要な t 分布，F 分布，Student 化された範囲である q 分布，χ^2 分布などもプログラミングされ，数表を参照することなく全ての計算処理ができることが特徴である。

参 考 文 献

(1) 近藤良夫，舟阪　渡：技術者のための統統計的方法，149－185，52－53，645，128－129，641，共立出版，1971.

(2) 川上弘泰：電算機による母平均の多重比較法，温研紀要，33巻2号，55－62，1981.

(3) 大村　平，今田直孝：推測統計の FORTRAN，31－58，オーム社，1972.

(4) 川上弘泰：電算機による母平均の推定と検定，温研紀要，31巻3号，62－67，1979.