『経営学論集』，第16巻　第1号，25-43，2005
KYUSHU SANGYO UNIVERSITY, *KEIEIGAKU RONSHU*（*BUSINESS REVIEW*）Vol. 16, NO. 1, 25-43, 2005

〔論　説〕

利得関数空間からナッシュ均衡対応のグラフへの同相写像の構成

髙　尾　健　朗

要　旨

本稿は，与えられた実数値の組からナッシュ均衡点を逆算して求める方法および利得行列の分解と変換法を示し，それらを使って，有限非協力標準形ゲームの集合からナッシュ均衡対応のグラフへの同相写像を具体的に構成したものである．さらに，その過程で得られたいくつかの命題も証明している．

目　次

1．はじめに

本稿では，プレイヤーの数および各プレイヤーのもっている純戦略の個数が固定された有限非協力標準形ゲーム（以下，単に‘標準形ゲーム’と呼ぶ）の集合を考え，ゲームの集合を利得関数空間（payoff function space）と同一視する．そこで，利得関数空間（つまり，ゲームの

集合）からナッシュ均衡対応（correspondence of Nash equilibria）[1]のグラフへの同相写像（homeomorphism）[2]を具体的に構成し，数値例を使ってその方法を示した．

以下，本稿の構成と本稿で取った同相写像を構成する方法についての概略について述べておく．第２章は，本稿全体で使う表記と基本定理の一覧である．第３章では，ナッシュ均衡点の逆算法[3]について説明した．これは，各プレイヤーの純戦略に１つずつ数値が割り当てられたとき，それらの数値の組が何らかのゲームのナッシュ均衡点から得られたものと仮定し，それらの数値の組のみから元のゲームのナッシュ均衡点を逆算して求める方法である．ただし，元のゲームそのもの（利得構造）は特定できない．第４章が本稿の目的である同相写像の構成に当てられる．第３章で説明した逆算法によって元のゲームの利得構造まで特定できるように，各プレイヤーの利得行列にいくらかの制限を与える．まず，各プレイヤーの利得行列を２つの行列の和に分解し，一方の行列に出てくる数値の組をパラメータとみなし，パラメータの違いを２つのゲームの違いとみなす．そこで，第３章で説明した逆算法によって，異なった２つの数値の組を１対１かつ連続的方法で結びつけ，元のゲームの利得構造とそのナッシュ均衡点を一意に定めるという方法を取っている．第５章はまとめとして，本稿で示した方法や命題から得られる結果について簡単に述べた．

---

[1] ナッシュ均衡対応とは，任意のゲームをそのゲームのナッシュ均衡集合（Nash equilibrium set）に写す写像のことである．

[2] X と Y を位相空間とするとき，写像$f:X\to Y$が同相写像あるいは位相写像であるとは，f が連続な全単射かつその逆写像$f^{-1}:Y\to X$も連続である場合をいう．X と Y の間に同相写像が存在するとき，X と Y は位相同型（homeomorphic）である，あるいは，X と Y は同相であると言われる．一般に，$f:X\to Y$が連続写像の場合には，そのグラフ$G(f)=\{(x,f(x))\in X\times Y|x\in X\}$と X は位相同型である．しかし，ナッシュ均衡対応の場合は連続ではないため，ゲームの集合（利得関数空間）とそのナッシュ均衡対応のグラフが位相同型であることは自明ではない．

[3] Kohlberg and Mertens（1986）でも，THEOREM 1 の証明の中で，ナッシュ均衡点の逆算の方法が書かれている．その方法は元のゲームの利得構造が分かっており，元のゲームのナッシュ均衡点を使って得た数値の組から元のゲームのナッシュ均衡点を逆算するものである．しかし，これでは本当にすべての場合を尽くしているのか疑問である．しかも，その論文では例はなくたったの３行ほどで書かれているため具体的方法がよく理解できない．そこで，本稿では，筆者自らが考えたナッシュ均衡点の逆算法を説明している．結果的には同じような方法になっていると思われるが，具体化されより一般化されている．

2．表記と基本的な定理

2．1．本稿での表記法

以下は，本稿全体で使う記号の一覧である．

$I=\{1,2,\cdots,n\}$：プレイヤーの集合．I は有限集合であり，n はプレイヤーの数．

$S_i=\{s_i^1,s_i^2,\cdots,s_i^{m_i}\}$：プレイヤー$i\,(\in I)$の純戦略（pure strategy）の集合．やはり，有限集合であり，m_iはプレイヤーiの持っている純戦略の個数．S_iの任意の元はs_iで表わす．

$S=\times_{i\in I}S_i$：純戦略空間（pure strategy space）．$\times$は集合の直積を表わす記号とする．一方，Πは掛け算を表わす記号とする．

$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in S$：純戦略プロファイル（pure strategy profile）．$s=(s_i)_{i\in I}$と表わすこともある．

$s_{-i}=(s_i,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},\cdots,s_n)\in\times_{j\in I-\{i\}}S_j:s\in S$から$s_i$を除いた純戦略プロファイル．

$(s_i',s_{-i})=(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\cdots,s_n):s=(s_1,\cdots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\cdots,s_n)$に対して，$s_i$を$s_i'\in S_i$に変えた純戦略プロファイル．ただし，何の断りもなければ$s_i'=s_i$の場合も許す．

$u_i(s)$：純戦略利得関数(pure strategy payoff function)．$s\in S$がプレイされるときのプレイヤーiの利得である．$u_i:S\to\mathbf{R}$である．ただし，$\mathbf{R}$は実数の集合である．

Δ_i：プレイヤーiの混合戦略集合．S_i上の確率分布の集合である．幾何学的には，S_iのすべての元を頂点とするm_i-1次元単体（simplex）である．

$\Delta=\times_{i\in I}\Delta_i$：混合戦略空間（mixed strategy space）．

$\Delta_{-i}=\times_{j\in I-\{i\}}\Delta_j$：$\Delta$からプレイヤー$i$の混合戦略集合$\Delta_i$のみを除いた混合戦略空間．

$\sigma_i\left(\sigma_i\left(s_i^1\right),\sigma_i\left(s_i^2\right),\cdots,\sigma_i\left(s_i^{m_i}\right)\right)\in\Delta_i$：プレイヤー$i$の混合戦略（mixed strategy）．$S_i$上の確率分布である．$\sigma_i\left(s_i^h\right)$はプレイヤー$i$の$h\,(=1,2,\cdots,m_i)$番目の純戦略に割り当てられている確率である．$\sigma_i=(\sigma_i(s_i))_{i\in S_i}$と表わすこともある．本稿では，意味を限定した混合戦略として$\varphi_i=(\varphi_i(s_i))_{s_i\in S_i}$も使う．

$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in\Delta$：混合戦略プロファイル．$\sigma=(\sigma_i)_{i\in I}$と表わすこともある．

$\sigma_{-i}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\cdots\sigma_n)\in\Delta_{-i}$：$\sigma\in\Delta$から$\sigma_i$を除いた混合戦略プロファイル．

$(\sigma_i',\sigma_{-i})=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_i',\sigma_{i+1},\cdots\sigma_n)$：$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\cdots\sigma_n)$に対して，$\sigma_i$を$\sigma_i'\in\Delta_i$に変えた混合戦略プロファイル．ただし，何の断りもなければ，$\sigma_i'=\sigma_i$の場合も許す．

$\pi_i(\sigma)$：$\sigma\in\Delta$がプレイされるときのプレイヤーiの期待利得関数（expected payoff function）．単なる期待値のことで，$\pi_i:\Delta\to\mathbf{R}$である．

$\pi(\sigma)=(\pi_1(\sigma),\pi_2(\sigma),\cdots,\pi_n(\sigma))$：結合期待利得関数．$\pi:\Delta\to\mathbf{R}^n$である．

$G=(I,\Delta,\pi)$：ゲーム$G=(I,S,u)$を混合拡大したゲーム．プレイヤー集合I，混合戦略空間Δ，結合期待利得関数πで構成される標準形ゲームのことである．

Γ_i：プレイヤー$i(\in I)$の利得関数空間．

$\Gamma=\times_{i\in I}\Gamma_i$：利得関数空間．同じプレイヤー集合$I$，同じ混合戦略空間$\Delta$をもつ標準形ゲームの集合と同一視される．

2．2．基本的な定義と定理

［基本的な定義］

ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$において，$\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(\sigma_i',\sigma_{-i})(\forall\sigma_i'\in\Delta_i)$であるとき，$\sigma_i\in\Delta_i$は$\sigma_{-i}\in\Delta_{-i}$に対する最適反応（best responce）であるという．特に，最適反応が純戦略である場合には，純戦略最適反応（pure strategy best responce）であるという．σ_{-i}に対するプレイヤーiの最適反応の集合を$B_i(\sigma_{-i})\subseteq\Delta_i$で表わし，純戦略最適反応の集合を$PB_i(\sigma_{-i})\subseteq S_i$で表わす．すべてのプレイヤーが最適反応を選択しているとき，その混合戦略プロファイルはナッシュ均衡点（Nash equilibrium point）であるという．すなわち，

$$\sigma\in\Delta\text{はゲーム }G\text{ のナッシュ均衡点}\Leftrightarrow\pi_i(\sigma)\geq\pi_i(\sigma_i',\sigma_{-i}),\quad\forall i\in I,\forall\sigma_i'\in\Delta_i.$$

$\sigma=(\sigma_i)_{i\in I}$がナッシュ均衡点であるとき，プレイヤー$i$の混合戦略$\sigma_i$をプレイヤー$i$のナッシュ均衡戦略あるいは簡単に均衡戦略（equilibrium strategy）といい，そのときに得られるプレイヤーiの期待利得をプレイヤーiの均衡利得（equilibrium payoff）という．なお，ゲームGのナッシュ均衡点の集合をGのナッシュ均衡集合といい$\Delta^{NE}(G)$で表わす．ナッシュ均衡集合を構成する（連結な）部分集合をナッシュ均衡集合の成分（component）という．

プレイヤーiの混合戦略$\sigma_i=\left(\sigma_i\left(s_i^1\right),\sigma_i\left(s_i^2\right),\cdots,\sigma_i\left(s_i^{m_i}\right)\right)\in\Delta_i$において，正の確率が付与されている純戦略の集合を$\sigma_i$の台（support）といい，$\mathrm{supp}(\sigma_i)=\{s_i\in S_i|\sigma_i(s_i)>0\}$で表わす．なお，プレイヤー$i$の$h(=1,2,\cdots,m_i)$番目の純戦略$s_i^h$を$m_i$次元ユークリッド空間の単位ベクトル$e_i^h=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$（$h$番目のみ1で他はすべて0）とみなして，プレイヤー$i$の任意の混合戦略を，$\sigma_i=\sum_{h=1}^{m_i}\sigma_i\left(s_i^h\right)s_i^h$あるいは$\sigma_i=\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)s_i$のように表わすこともある．

$\sigma(s)$を混合戦略プロファイル$\sigma=(\sigma_i)_{i\in I}\in\Delta$によって$s=(s_i)_{i\in I}$が起こる確率とする．すなわち，$\sigma(s)=\prod_{i\in I}\sigma_i(s_i)$．また，$\sigma_{-i}(s_{-i})=\prod_{j\in I-\{i\}}\sigma_j(s_j)$と表わすと，$\sigma$が使われるときのプレイヤー$i$の期待利得は，$\pi_i(\sigma)=\sum_{s\in S}\sigma(s)u_i(s)=\sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma_i(s_i)\sigma_{-i}(s_{-i})u_i(s_i,s_{-i})$で定義される．また，$\pi_i(\sigma)=\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})=\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)\pi_i(s_i,\sigma_{-i})$と表わすこともできる．むしろ，本稿では，後者の期待利得の表わし方を採用する．

[基本的な定理]

ここで挙げている定理も基礎的なものばかりであり，第3章以降では断らずに使っている箇所も多い．

ナッシュ均衡点の存在定理：すべての有限非協力標準形ゲームにはナッシュ均衡点が存在する（Nash 1951）．

ナッシュ均衡成分の連結性定理：ナッシュ均衡集合は，（互いに素な）有限個の連結成分（connected component）をもつ（Kohlberg and Mertens 1986）．

最適反応と純戦略最適反応の関係に関する定理

$$\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{i \in S_i} \in B_i(\sigma_{-i}) \Leftrightarrow \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i}), \quad \forall \sigma_i' \in \Delta_i \qquad \text{（定義式）}$$

$$\Leftrightarrow (\forall s_i \in S_i; s_i \in \mathrm{supp}(\sigma_i) \Rightarrow s_i \in PB_i(\sigma_{-i}))$$

$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{s_i \in PB_i(\sigma_{-i})} \lambda(s_i) s_i \in B_i(\sigma_{-i}),\ \text{ただし，}\ 0 \leq \forall \lambda(s_i) \leq 1,\ \sum_{s_i \in PB_i(\sigma_{-i})} \lambda(s_i) = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \sigma_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i.$$

また，$\forall \sigma_i \in B_i(\sigma_{-i})$に対して，

$$\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \qquad \forall s_i \in \mathrm{supp}(\sigma_i)$$

$$\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \qquad \forall s_i \notin \mathrm{supp}(\sigma_i)$$

が成り立つ．

3．ナッシュ均衡点の逆算法

3．1．基本となる命題

ゲーム$G = (I, \Delta, \pi)$において，m_iをプレイヤーiの純戦略の個数とするとき，ベクトル

$$\nu_i = (\nu_i^1, \nu_i^2, \cdots, \nu_i^{m_i}) \in \mathbf{R}^{m_i}$$

の各成分ν_i^h $(h = 1, 2, \cdots, m_i)$を，プレイヤー$i \in I$のh番目の純戦略$s_i^h \in S_i$に割り当てられた実数値とする——ν_i^hは確率とは限らないことに注意——．また，nをプレイヤーの数とするとき，$\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \times_{i \in I} \mathbf{R}^{m_i}$と表わす．

本章では，このように任意に$\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \times_{i \in I} \mathbf{R}^{m_i}$が与えられたとき，その元となるゲームのナッシュ均衡点を逆算する方法を示す．なお，与えられた$\nu = (\nu_i)_{i \in I}$から逆算して得られ

たプレイヤー i の混合戦略を $\varphi_i(\nu)=\left(\varphi_i^{s_i}(\nu)\right)_{s_i\in S_i}$ で表わす.

定義3.1. ゲーム $G=(I,\Delta,\pi)$ において，写像 $\mu_i^{s_i}:\Delta\to\mathbf{R}$ を

$$\mu_i^{s_i}(\sigma)=\sigma_i(s_i)+\pi_i(s_i,\sigma_{-i}),\quad \forall i\in I,\ \forall s_i\in S_i \tag{3.1.1}$$

で定義する.

写像 $\mu_i:\Delta\to\mathbf{R}^{m_i}$（$m_i$ はプレイヤー i の純戦略の個数）を

$$\mu_i(\sigma)=\left(\mu_i^{s_i}(\sigma)\right)_{s_i\in S_i},\qquad \forall i\in I \tag{3.1.2}$$

で表わす．さらに，写像 $\mu:\Delta\to\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$ を

$$\mu(\sigma)=(\mu_i(\sigma))_{i\in I} \tag{3.1.3}$$

で表わす.

命題3.1. ゲーム $G=(I,\Delta,\pi)$ において，$\forall\sigma\in\Delta^{NE}(G)$ に対して，

$$\sum_{s_i\in S_i}\max\left\{0,\ \mu_i^{s_i}(\sigma)-\pi_i(\sigma)\right\}=1,\quad \forall i\in I \tag{3.1.4}$$

が成り立つ.

（証明）$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$ とおくと，

$$\mu_i^{s_i}(\sigma)-\pi_i(\sigma)=\sigma_i(s_i)+\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i}).$$

$\forall\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})\in\Delta^{NE}(G)$，$\forall s_i\in S_i$ に対して，

$$s_i\in\operatorname{supp}(\sigma_i)\Rightarrow\sigma_i(s_i)>0,\ \pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})=0,$$

$$s_i\notin\operatorname{supp}(\sigma_i)\Rightarrow\sigma_i(s_i)=0,\ \pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\le 0$$

である．また，$\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)=\sum_{s_i\in\operatorname{supp}(\sigma_i)}\sigma_i(s_i)=1$ だから，

$$\begin{aligned}&\sum_{s_i\in S_i}\max\left\{0,\ \mu_i^{s_i}(\sigma)-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\right\}\\&\quad=\sum_{s_i\in\operatorname{supp}(\sigma_i)}\max\left\{0,\ \mu_i^{s_i}(\sigma)-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\right\}+\sum_{s_i\notin\operatorname{supp}(\sigma_i)}\max\left\{0,\ \mu_i^{s_i}(\sigma)-\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\right\}\\&\quad=1+0=1.\ \square\end{aligned}$$

命題3.2. 関数 $\rho_i:\Delta\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)=\sum_{s_i\in S_i}\max\left\{0,\ \mu_i^{s_i}(\sigma)-\alpha\right\},\quad \forall i\in I \tag{3.1.5}$$

で定義する．このとき，任意に固定した $\sigma\in\Delta$ に対して，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)=1$ を満たす $\alpha\in\mathbf{R}$ が一意に定まる.

（証明）$\forall i\in I$，$\forall s_i\in S_i$，$\forall\sigma\in\Delta$ に対して，$\mu_i^{s_i}(\sigma)$ は実数値を取るので，十分に小さい $\alpha\in\mathbf{R}$ に対して，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)>1$ とできる．ここで，α を大きくしていくと，$\mu_i^{s_i}(\sigma)-\alpha\le 0(\forall s_i\in S_i)$

となるまで，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)$は連続的に単調に減少していく．したがって，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)=1$となる$\alpha\in\mathbf{R}$が存在し，それは一意である．□

命題３．３． σがナッシュ均衡点のとき，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)=1$を満たす$\alpha\in\mathbf{R}$は，プレイヤー$i\in I$の均衡利得である．

（証明）命題３．１と命題３．２より，$\alpha=\pi_i(\sigma)$が成り立つ．したがって，σはナッシュ均衡点だから，αはプレイヤーiの均衡利得である．□

命題３．４． ナッシュ均衡点$\sigma\in\Delta^{NE}(G)$に，(3.1.1) を使って計算し，$\mu_i(\sigma)=\left(\mu_i^{s_i}(\sigma)\right)_{s_i\in S_i}$を得たとする．すると，逆に，すべての$i\in I$について，$\mu_i(\sigma)=\left(\mu_i^{s_i}(\sigma)\right)_{s_i\in S_i}$が与えられたとき，元のナッシュ均衡点を求めることができる．

（証明）命題３．２より，$\rho_i(\mu(\sigma),\alpha)=1$を満たす$\alpha$が一意に求められる．ここで，

$\mu_i^{s_i}(\sigma)-\alpha\geq 0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\mu(\sigma))=\mu_i^{s_i}(\sigma)-\alpha$,

$\mu_i^{s_i}(\sigma)-\alpha< 0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\mu(\sigma))=0$

とおいてできる混合戦略$\varphi_i(\mu(\sigma))=\left(\varphi_i^{s_i}(\mu(\sigma))\right)_{s_i\in S_i}$は，プレイヤー$i$の元の均衡戦略である．同じことをすべてのプレイヤーに対して行なえばよい．□

３．２．ナッシュ均衡点の逆算法

命題３．４で示したナッシュ均衡点の逆算法は，各プレイヤーの$\mu_i(\sigma)=\left(\mu_i^{s_i}(\sigma)\right)_{s_i\in S_i}$は，あくまで定義３．１の写像によって得られたものであると仮定している．しかし，$\nu_i=\left(\nu_i^{s_i}\right)_{s_i\in S_i}$が任意に与えられた場合でも，機械的に命題３．４の証明で示されている方法を利用し，あるゲームのナッシュ均衡点を求めることができる．その方法をナッシュ均衡点の逆算法として一般化し，例を使って具体的な方法を示す．

[ナッシュ均衡点の逆算法]

プレイヤーの数nと各プレイヤー$i\in I$の純戦略の個数m_iは固定されているものとする．写像$\rho_i:\mathbf{R}^{m_i}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,(i\in I)$を，

$$\rho_i(\nu_i,\alpha_i)=\sum_{s_i\in S_i}\max\left\{0,\ \nu_i^{s_i}-\alpha_i\right\},\quad \forall\nu_i=\left(\nu_i^{s_i}\right)_{s_i\in S_i}\in\mathbf{R}^{m_i},\quad \forall\alpha_i\in\mathbf{R} \tag{3.1.6}$$

で定義する．ベクトル$\nu_i=\left(\nu_i^{s_i}\right)_{s_i\in S_i}\in\mathbf{R}^{m_i}$が任意に与えられたとき，$\rho_i(\nu_i,\alpha_i)=1$を満たす$\alpha_i$を求め，

$\nu_i^{s_i}-\alpha_i \geq 0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\nu_i)=\nu_i^{s_i}-\alpha_i$，

$\nu_i^{s_i}-\alpha_i < 0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\nu_i)=0$

とおいてできる混合戦略$\varphi_i(\nu_i)=\left(\varphi_i^{s_i}(\nu_i)\right)_{s_i \in S_i}$は，あるゲームのプレイヤー$i$の均衡戦略になっている．さらに，$\nu=(\nu_i)_{i \in I} \in \times_{i \in I} \mathbf{R}^{m_i}$が与えられれば，あるゲームのナッシュ均衡点が求められる．このように求めたナッシュ均衡点は，$\varphi(\nu)=(\varphi_i(\nu))_{i \in I}$のように表わし，プレイヤー$i$の均衡戦略を$\varphi_i(\nu)=\left(\varphi_i^{s_i}(\nu)\right)_{s_i \in S_i}$，純戦略$s_i$に割り当てられる確率を$\varphi_i^{s_i}(\nu)=\varphi_i^{s_i}(\nu_i)$とも表わす．

ただし，ナッシュ均衡点の逆算法では，この‘あるゲーム’の利得構造は正確には分からない．そこで，とりあえず，与えられた実数値の組から何らかのゲームのナッシュ均衡点を求める算法を次の写像として定義する．

定義３．２． ベクトル$\nu_i=\left(\nu_i^{s_i}\right)_{s_i \in S_i} \in \mathbf{R}^{m_i}$が与えられたとき，［ナッシュ均衡点の逆算法］により，ν_iからプレイヤーiのあるゲームにおける均衡戦略を求める写像を$\varphi_i:\mathbf{R}^{m_i} \to \Delta_i$で定義する．

ここで，$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n) \in \times_{i \in I} \mathbf{R}^{m_i}$が与えられたとき，$\nu$からあるゲームのナッシュ均衡点を求める写像を次のように表わす；

$$\varphi:\times_{i \in I} \mathbf{R}^{m_i} \to \Delta,\quad \varphi(\nu)=(\varphi_1(\nu),\varphi_2(\nu),\cdots,\varphi_n(\nu)) \quad \text{または} \quad \varphi(\nu)=(\varphi_i(\nu))_{i \in I}. \tag{3.1.7}$$

［数値例１］

表３．１． ２×２対称ゲーム

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	1,1	0,0
s_1^2	0,0	x, x

表３．１のゲームにおいて，xの値のみが変化する場合を考える．プレイヤー$i\,(=1,2)$の混合戦略を$\sigma_i=(1-\lambda_i)s_i^1+\lambda_i s_i^2\,(0 \leq \lambda_i \leq 1)$とおいて，プレイヤー$i$の均衡戦略対応のグラフを描いたものが図３．１である．表３．１のゲームのナッシュ均衡点は，

$x<0$のとき，$\left(s_1^1,s_2^1\right)$の１つ，　　$x=0$のとき，$\left(s_1^1,s_2^1\right)$，$\left(s_1^2,s_2^2\right)$の２つ，

$x>0$のとき，$\left(s_1^1,s_2^1\right)$，$\left(s_1^2,s_2^2\right)$と$\left(\frac{x}{1+x}s_1^1+\frac{1}{1+x}s_1^2,\ \frac{x}{1+x}s_2^1+\frac{1}{1+x}s_2^2\right)$の３つ

である．そこで，x の値にかかわらず，つねにナッシュ均衡点である$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=\left(s_1^1,s_2^1\right)$を考えよう．$\sigma_i=s_i^1=(1,0)(i=1,2)$であるから，

$$\mu_i^{s_i^1}(\sigma)=\sigma_i\left(s_i^1\right)+\pi_i\left(s_i^1,\sigma_j\right)=1+1=2,\quad \mu_i^{s_i^2}(\sigma)=\sigma_i\left(s_i^2\right)+\pi_i\left(s_i^2,\sigma_j\right)=0+0=0$$

となる．ただし，$i,j=1,2; i\neq j$．したがって，$\mu_i(\sigma)=(2,0)(i=1,2)$である．

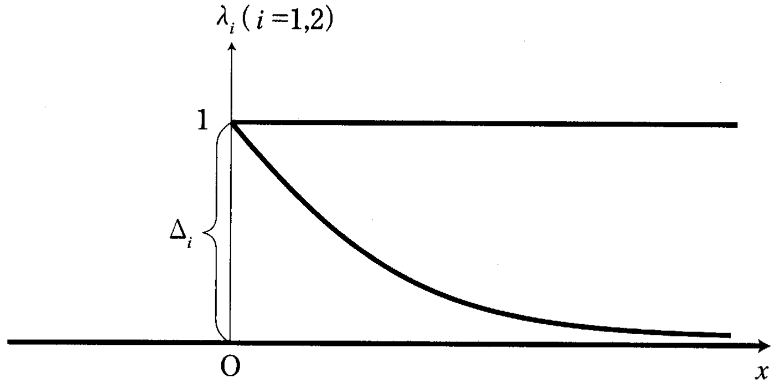

図３．１．均衡戦略対応のグラフ（太い実線部）

今度は，$\mu_i(\sigma)=(2,0)(i=1,2)$の値を所与として，元のゲームのナッシュ均衡点とプレイヤーの均衡利得を逆算する．まず，$\rho_i(\mu_i(\sigma),\alpha_i)=1$，すなわち，

$$\sum_{h=1}^{2}\max\left\{0,\mu_i^{s_i^h}(\sigma)-\alpha_i\right\}=\max\{0,2-\alpha_i\}+\max\{0,0-\alpha_i\}=1$$

とおく．この方程式を満たすα_iは１だから，$\alpha_i=1$がプレイヤー$i\,(i=1,2)$の均衡利得であり，$\mu_i^{s_i^1}(\sigma)-\alpha_i=2-1>0$, $\mu_i^{s_i^2}(\sigma)-\alpha_i=0-1<0$だから，均衡戦略は$\varphi_i=(1,0)(i=1,2)$になる．
□

このように与えられた数値の組のみから元のゲームの各プレイヤーの均衡戦略（要するに，ナッシュ均衡点）とそれに対応する各プレイヤーの均衡利得が求められるが，このようなゲームは無限に存在する．なぜならば，表３．１のゲームにおいて，x がどのような実数値を取っても，$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=\left(s_1^1,s_2^1\right)$はナッシュ均衡点であり，各プレイヤーに均衡利得１を与えるからである．次の第４章は，ナッシュ均衡点の逆算法によって元のゲームまで一意に定めることができるようにするための方法に当てられる．

４．利得行列の分解と同相写像の構成

４．１．利得行列の分解

本節では，各プレイヤーの利得行列を２つの特徴的な行列の和に分解し，標準形ゲームの表

わし方を変える．なお，表記の煩雑さを軽減するために，プレイヤー$i\,(\in I)$の純戦略の個数がm_iのとき，$|S_i|=m_i$，$|S|=\prod_{i\in I}m_i$，$|S_{-i}|=\prod_{j\in I-\{i\}}m_j$のように表わすこともある．

まず，ゲーム$G=(I,S,u)$において，プレイヤーの集合Iと各プレイヤーのもつ純戦略集合$S_i\,(i\in I)$を固定する．ただし，これまで通りIと$S_i\,(\forall i\in I)$はともに有限集合とする．このように，プレイヤーの数が等しく，各プレイヤーのもつ純戦略の個数が等しい２つのゲームは同じ型（same type）であると呼ぶことにする．

Γ_iをプレイヤー$i\,(i\in I)$の利得関数空間とするとき，$\Gamma_i=\mathbf{R}^{|S|}$であり，$\Gamma=\times_{i\in I}\Gamma_i$と表わす．プレイヤー$i\in I$の利得行列を$\mathrm{M}_i$で表わす．$\mathrm{M}_i$は$S_i\times S_{-i}$行列であり，プレイヤー$i$の利得関数空間$\Gamma_i$はすべての$\mathrm{M}_i$の集合と考えることができる．ここで，$\mathrm{M}_i$の$(s_i,s_{-i})$成分を$M_i^{s_i}(s_{-i})$と表わす．したがって，$I$と$S$が固定されているので，ゲーム$G=(I,S,u)$は，$\mathbf{M}=(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\cdots,\mathrm{M}_n)$で表わすことができる．

さらに，プレイヤーiの利得行列M_iの(s_i,s_{-i})成分$M_i^{s_i}(s_{-i})$を

$$M_i^{s_i}(s_{-i})=\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})+\eta_i^{s_i} \tag{4.1.1}$$

のように２つの実数$\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})$と$\eta_i^{s_i}$の和で表わす．ただし，

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})=0 \qquad \eta_i^{s_i}=\frac{\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}M_i^{s_i}(s_{-i})}{|S_{-i}|}$$

となるように取っている．$\eta_i^{s_i}$は，プレイヤー$i\in I$が純戦略$s_i\in S_i$を選択したときに得られる単純な平均利得である．$\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})$を成分にもつ$S_i\times S_{-i}$型行列と，$m_i\,(=|S_i|)$次元縦ベクトルを$\eta_i=\left(\eta_i^{s_i}\right)^T_{s_i\in S_i}$（上付きの$T$は転置を表わす．以後も同じ）と表わし，この$\eta_i$を$|S_{-i}|$個並べた$S_i\times S_{-i}$型行列（$m_i\times|S_{-i}|$型行列）を，それぞれ，

$$\tilde{\mathrm{M}}_i=\begin{pmatrix}\left(\tilde{M}_i^{s_i^1}(s_{-i})\right)_{s_{-i}\in S_{-i}}\\ \left(\tilde{M}_i^{s_i^2}(s_{-i})\right)_{s_{-i}\in S_{-i}}\\ \vdots\\ \left(\tilde{M}_i^{s_i^{m_i}}(s_{-i})\right)_{s_{-i}\in S_{-i}}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta}_i=(\eta_i,\eta_i,\cdots,\eta_i)=\begin{pmatrix}\eta_i^{s_i^1} & \eta_i^{s_i^1} & \cdots & \eta_i^{s_i^1}\\ \eta_i^{s_i^2} & \eta_i^{s_i^2} & \cdots & \eta_i^{s_i^2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta_i^{s_i^{m_i}} & \eta_i^{s_i^{m_i}} & \cdots & \eta_i^{s_i^{m_i}}\end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

で表わす．したがって，プレイヤーiの利得行列M_iは，これら２つの行列の和

$$\mathrm{M}_i=\tilde{\mathrm{M}}_i+\boldsymbol{\eta}_i \tag{4.1.3}$$

に分解できる．M_iを，行列$\tilde{\mathrm{M}}_i$とベクトルη_iをパラメータとしてそれらを組にした，$\left(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i\right)$で表わす．すると，プレイヤー$i\,(i\in I)$の利得関数空間$\Gamma_i$はすべての組$\left(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i\right)$の集合とみなすことができる．

さらに，$\tilde{\mathbf{M}}=\left(\tilde{\mathrm{M}}_1,\tilde{\mathrm{M}}_2,\cdots,\tilde{\mathrm{M}}_n\right)$，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$とおけば，同じ型のゲームの集合$\Gamma$はすべての組$\left(\tilde{\mathbf{M}},\eta\right)$とみなされる．$\tilde{\mathbf{M}}$をゲーム$\left(\tilde{\mathbf{M}},\eta\right)$の基底ゲーム，(4.1.2) の$\boldsymbol{\eta}_i\,(i\in I)$を組にした$\boldsymbol{\eta}=$

$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$を平均利得ゲームと呼ぶことにする．

(4.1.3) の記法を使うと，ゲーム$G=(I, S, u)$を混合拡大した$G=(I, \Delta, \pi)$において，$\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$に対して，プレイヤー$i \in I$が純戦略$s_i \in S_i$を選択したときに得られる期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_i(s_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left\{\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i}) + \eta_i^{s_i}\right\} \sigma_{-i}(s_{-i}) \\ &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i}) \sigma_{-i}(s_{-i}) + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \eta_i^{s_i} \sigma_{-i}(s_{-i}) \\ &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i}) \sigma_{-i}(s_{-i}) + \eta_i^{s_i} \qquad \left(\because \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) = 1\right) \qquad (4.1.4)\end{aligned}$$

となる．$\pi_i(\sigma_{-i}) = (\pi_i(s_i, \sigma_{-i}))^T_{s_i \in S_i}$とおけば，

$$\pi_i(\sigma_{-i}) = \tilde{\mathrm{M}}_i \sigma_{-i}^T + \eta_i$$

と表わされ，さらに，$\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$に対して，プレイヤー$i \in I$が混合戦略$\sigma_i$を選択するときに得られる期待利得が，

$$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sigma_i \left\{\tilde{\mathrm{M}}_i \sigma_{-i}^T\right\} + \sigma_i \eta_i$$

と簡単に表わされる．

[数値例 2]

表3．1のゲームにおいて，プレイヤー$i\,(=1,2)$の利得行列は

$$\mathrm{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -x/2 & x/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ x/2 & x/2 \end{pmatrix}$$

のように2つの行列の和に分解できる．これら2つの行列を

$$\tilde{\mathrm{M}}_i = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -x/2 & x/2 \end{pmatrix}, \qquad \eta_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ x/2 & x/2 \end{pmatrix}$$

とおき，$\eta_i = (1/2, x/2)^T$とおく．さらに，$\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{\mathrm{M}}_1, \tilde{\mathrm{M}}_2)$，$\eta = (\eta_1, \eta_2)$とおけば，このゲームは，$(\tilde{\mathrm{M}}, \eta)$で表わされる．

プレイヤー$j\,(=1,2)$の任意の混合戦略$\sigma_j = (\sigma_j(s_j^1), \sigma_j(s_j^2))$に対して，プレイヤー$i\,(=1,2; i \neq j)$が純戦略$s_i^h\,(h=1,2)$を選択したときに得られる期待利得は，

$$\pi_i(s_i^1, \sigma_j) = \frac{1}{2}\sigma_j(s_j^1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\sigma_j(s_j^2) + \frac{1}{2}, \qquad \pi_i(s_i^2, \sigma_j) = -\frac{x}{2}\sigma_j(s_j^1) + \frac{x}{2}\sigma_j(s_i^2) + \frac{x}{2}$$

となる．□

4．2．ゲームの変換

以後，ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$は，$G=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$という表わし方をする．まず，

$$\nu_i=(\nu_i^1,\nu_i^2,\cdots,\nu_i^{m_i})\in\mathbf{R}^{m_i},\qquad \nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)\in\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$$

が与えられると，ゲーム$G=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$から機械的に同じ基底ゲームをもつ新しいゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\nu)$が作れる．この$\eta$と$\nu$の間に第3章で定義した写像$\mu$と$\varphi$を使って，ゲームを変換するのが本節の目的である．

ここで，定義3．1の写像と実質的に同じ写像を同じ記号を使って次のように定義する．

定義4．1． 写像$\mu_i^{s_i}:\Gamma\times\Delta\to\mathbf{R}$を

$$\mu_i^{s_i}(\sigma)=\sigma_i(s_i)+\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\sigma_{-i}(s_{-i})+\eta_i^{s_i},\quad \forall(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i)\in\Gamma,\quad \forall i\in I \tag{4.2.1}$$

で定義する．

$\mu_i(\sigma)=(\mu_i^{s_i}(\sigma))_{s_i\in S_i}^T$とおけば，定義4．1より，

$$\mu_i(\sigma)=\sigma_i^T+\tilde{\mathrm{M}}_i\sigma_{-i}^T+\eta_i \tag{4.2.2}$$

と表わされる．$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\sigma_{-i}(s_{-i})+\eta_i^{s_i}$であるから，命題3．1～命題3．4がそのまま成り立つ．

プレイヤーiの利得行列を，混合戦略プロファイル$\sigma\in\Delta$を使って，$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i)$から$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\mu_i(\sigma))$へと変換する写像$\mu_i:\Gamma_i\times\Delta\to\Gamma_i$を，

$$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\mu_i(\sigma))=\mu_i((\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i),\sigma) \tag{4.2.3}$$

で定義する．すべてのプレイヤーに対してこの変換を行なえば，元のゲームを変換する写像が次のように定義される．

定義4．2． 写像$\boldsymbol{\mu}:\Gamma\times\Delta\to\Gamma$を，

$$(\tilde{\mathbf{M}},\mu(\sigma))=\boldsymbol{\mu}((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\sigma),\qquad \forall(\tilde{\mathbf{M}},\eta)\in\Gamma,\forall\sigma\in\Delta \tag{4.2.4}$$

で定義する．

写像$\boldsymbol{\mu}:\Gamma\times\Delta\to\Gamma$は明らかに$\Gamma\times\Delta$上で連続かつ単射である．

[数値例３]

表４．１．２人標準形ゲームの例

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	2, 2	0, 1
s_1^2	1, 0	1, 1
s_1^3	0, 0	1, 2

表４．１のゲーム[4]では，プレイヤー１の利得行列M_1とプレイヤー２の利得行列M_2は，それぞれ

$$M_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad M_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

である．簡単な計算により，

$$\tilde{M}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix},\qquad \eta_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_2=\begin{pmatrix}4/3 & -2/3 & -2/3\\ -1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\ 4/3\end{pmatrix}$$

を得る．したがって，$\tilde{\mathbf{M}}=(\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)$，$\eta=(\eta_1,\eta_2)$とおくと，表４．１のゲームは

$$G=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$$

と表わされる．

ここで，このゲームの均衡戦略が$\sigma_1=(0,t,1-t)$（ただし，$0\leq t\leq 1$），$\sigma_2=(0,1)$であるナッシュ均衡点を$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$——均衡利得は，$\pi_i(\sigma)=1$，$\pi_2(\sigma)=2-t$——とおき，$\boldsymbol{\mu}((\tilde{\mathbf{M}},\mu),\sigma)$を求める．まず，定義４．１の（4.2.1）式より，$\mu_1^{s_1^1}(\sigma)$を求めると

$$\mu_1^{s_1^1}(\sigma)=0+\{1\times 0+(-1)\times 1\}+1=0$$

となる．同様にして，

$$\mu_1^{s_1^2}(\sigma)=t+1,\qquad \mu_1^{s_1^3}(\sigma)=2-t,\qquad \mu_2^{s_2^1}(\sigma)=0,\qquad \mu_2^{s_2^2}(\sigma)=3-t$$

が求められる．したがって，$\mu_1(\sigma)=(0,t+1,2-t)^T$，$\mu_2(\sigma)=(0,3-t)^T$であり，

$$\boldsymbol{\mu}((\tilde{\mathbf{M}},\mu),\sigma)=(\tilde{\mathbf{M}},\mu(\sigma))\qquad（ただし，\mu(\sigma)=(\mu_1(\sigma),\mu_2(\sigma))）$$

となる．□

---

[4] 拙稿（2005）で，表４．１のゲームに対して，各プレイヤーの最適反応対応とナッシュ均衡集合を図解している．

4.3. 同相写像の構成

ナッシュ均衡対応$\Delta^{NE}:\Gamma\to\Delta$とは，任意のゲーム$G\in\Gamma$をそのゲームのナッシュ均衡集合$\Delta^{NE}(G)$に写す写像であり，$\Delta^{NE}:\Gamma\to\Delta$のグラフを

$$\mathcal{G}(\Delta^{NE})=\{(G,\sigma)\in\Gamma\times\Delta|\sigma\in\Delta^{NE}(G)\} \tag{4.3.1}$$

で表わす．$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$に対して，(3.1.7) の写像$\varphi:\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}\to\Delta$を$\mu=(\mu_i)_{i\in I}$に適用すると，命題3.4より，$\varphi(\mu)\in\Delta^{NE}(G')(\exists G'\in\Gamma)$となる．そこで，写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\Gamma\times\Delta$をゲーム$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$から$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$のある点に写す写像とする．このとき，次の命題が成り立つ．

命題4.1． ゲーム$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$に対して，(3.1.7) の写像$\varphi:\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}\to\Delta$を$\mu=(\mu_i)_{i\in I}\in\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$に適用して得られた$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$をナッシュ均衡点にもち，$G$と同じ基底ゲーム$\tilde{\mathbf{M}}$をもつゲーム$G'$が存在し，それは一意である．

(証明)まず，ゲームG'を構成する．(4.2.1)で，$\mu_i^{s_i}(\sigma)=\mu_i^{s_i},\sigma_i(s_i)=\varphi_i^{s_i}(\mu),\sigma_{-i}(s_{-i})=\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu)$と置き換え，すべての$s_i\in S_i$について

$$\eta_i^{s_i}=\mu_i^{s_i}-\varphi_i^{s_i}(\mu)-\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu) \tag{4.3.2}$$

を求める．これらの$\eta_i^{s_i}$から，(4.1.2) のη_iを作り，プレイヤーiの利得行列$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i)$を作る．この操作をすべてのプレイヤーに対して行なえば，ゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$が得られる．ゲーム$G'$の作り方から一意性が示されている．次に，$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$が，このようにして作ったゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$のナッシュ均衡点になっていることを確認すればよい．

ゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$において，$\pi_i(s_i,\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu))=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu)+\eta_i^{s_i}\ (\forall i\in I)$だから，(4.3.2) は，

$$\pi_i(s_i,\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu))=\mu_i^{s_i}-\varphi_i^{s_i}(\mu) \tag{4.3.3}$$

と変形できる．ナッシュ均衡点の逆算法によって得たプレイヤーiの均衡利得をα_iとする．$\mu_i^{s_i}-\alpha_i\geq 0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\mu)=\mu_i^{s_i}-\alpha_i\geq 0$，となっているので，(4.2.7) より，$\mu_i^{s_i}-\alpha_i\geq 0$となる$s_i\in S_i$に対して，

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})=\mu_i^{s_i}-\varphi_i(s_i)=\alpha_i$$

となる．このことは，均衡利得を与える純戦略に0以上の確率が付与されていることを意味する．一方，$\mu_i^{s_i}-\alpha_i<0$ならば，$\varphi_i^{s_i}(\mu)=0$，となっているので，(4.2.7) より，$\mu_i^{s_i}-\alpha_i<0$となる$s_i\in S_i$に対して，

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})=\mu_i^{s_i}<\alpha_i$$

となる．このことは，均衡利得未満の利得しか与えない純戦略にはすべて0の確率が付与されていることを意味している．したがって，S_i上の確率分布$\varphi_i=(\varphi_i^{s_i}(\mu))_{s_i\in S_i}$は，$\sigma_{-i}$に対する

プレイヤーiの最適反応である．同じことがすべてのプレイヤーに対しても言えるので，$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$は，ゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$のナッシュ均衡点である．□

命題4．1より，写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\Gamma\times\Delta$を，次のように定義し直すことができる．

定義4．3． 写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$を，

$$\left((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\varphi(\mu)\right)=\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{M}},\mu),\qquad \forall(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$$

で定義する．ただし，$\varphi(\mu)$は，(3.1.7) の写像によって得られる値であり，ηは (4.3.2) より得られるベクトルの組である．なお，表記の簡略化のために，$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$は$\boldsymbol{\varphi}((\tilde{\mathbf{M}},\mu))$のこととする．

定義4．3の写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は，少々複雑な構成になっているので，説明を加えておこう．まず，ゲーム$\mathbf{M}=(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\cdots,\mathrm{M}_n)\in\Gamma$が与えられたとき，これを4．1節の方法で，$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$に書き換える．次に，(3.1.7) の写像を使って，$\mu=(\mu_i)_{i\in I}$から$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$を計算する．最後に，(4.3.2) を使って，$\mu=(\mu_i)_{i\in I}$，$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$および$\tilde{\mathbf{M}}=(\tilde{\mathrm{M}}_i)_{i\in I}$から$\eta=(\eta_i)_{i\in I}$を計算して，$\left((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\varphi(\mu)\right)\in\Gamma\times\Delta$を得る．このとき，$\varphi(\mu)\in\Delta^{NE}(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$になっているということである．

明らかに，写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は$\Gamma$上で連続である．そして，次の命題が成り立つ．

命題4．2． 写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は，同相写像である．

(証明)命題4．1より，写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は全単射である．写像$\boldsymbol{\mu}:\Gamma\times\Delta\to\Gamma$で，$\Delta$をゲーム$G\in\Gamma$のナッシュ均衡集合$\Delta^{NE}(G)(\forall G\in\Gamma)$に制限した写像$\boldsymbol{\mu}|\mathcal{G}(\Delta^{NE}):\Gamma\times\Delta\to\Gamma$は，写像$\boldsymbol{\varphi}$の逆写像である．また，$\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{\varphi}$は連続であるから，$\boldsymbol{\varphi}$は同相写像である．□

［数値例4］

プレイヤー$i(=1,2)$の利得行列が

$$\mathrm{M}_i=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

で表わされる2×2対称ゲームを考える．このゲームの$\tilde{\mathrm{M}}_i$とμ_iは，

$$\tilde{\mathrm{M}}_i=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad \mu_i=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},\qquad i=1,2$$

であり，$\tilde{\mathbf{M}}=(\tilde{\mathrm{M}}_1,\tilde{\mathrm{M}}_2)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2)$とおけば，このゲームは$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$で表わされる．この$\mu=(\mu_1,\mu_2)$に（3.1.7）の$\varphi$を使うと

$$\varphi_i^{s_i^1}(\mu)=0, \qquad \varphi_i^{s_i^2}(\mu)=1, \qquad \alpha_i=1 \ (\text{均衡利得})$$

となるので，$\eta_i^{s_i^h}\ (h=1,2)$は，（4.3.2）より，

$$\eta_i^{s_i^1}=-1-0-\left\{\frac{1}{2}\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1\right\}=-\frac{1}{2}, \qquad \eta_i^{s_i^2}=2-1-(-1\times 0+1\times 1)=0$$

と計算される．つまり，$\eta_i=(-1/2,\,0)^T$．これで，$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{M}},\mu)=((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\varphi(\mu))$が求められたことになる．分かり易いように，ゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$を表3．1のような表で表わすと，表4．2になり，$\varphi_i=(0,1)$は均衡戦略であり，1が均衡利得であることが分かる．□

表4．2．ゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	0,　0	−1, −1
s_1^2	−1, −1	1,　1

数値例4は，2×2対称ゲームであったが，今度は，もう少し複雑な表4．1のゲームを使って，写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to G(\Delta^{NE})$が写像$\boldsymbol{\mu}|G(\Delta^{NE}):\Gamma\times\Delta\to\Gamma$の逆写像になっていることを確認してみる．

［数値例5］

2人標準形ゲームにおいて，

$$\tilde{\mathrm{M}}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \qquad \mu_1=\begin{pmatrix}0\\ t+1\\ 2-t\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{M}}_2=\begin{pmatrix}4/3 & -2/3 & -2/3\\ -1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}, \qquad \mu_2=\begin{pmatrix}0\\ 3-t\end{pmatrix}$$

で定義されるゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$を考える．これから逆に元のゲーム――数値例3の$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$――とそのナッシュ均衡点――$\varphi_1=(0,t,1-t)$，$\varphi_2=(0,1)$の組――を求める．

まず，ナッシュ均衡点の逆算法を使い，元のゲームの均衡利得と均衡戦略を求める．プレイヤー1について，$\rho_1(\mu(\sigma),\alpha_1)=1$とおく．すなわち，

$$\sum_{h=1}^{3}\max\left\{0,\mu_1^{s_1^h}-\alpha_1\right\}=\max\{0,0-\alpha_1\}+\max\{0,t+1-\alpha_1\}+\max\{0,2-t-\alpha_1\}=1.$$

この方程式を満たすα_1は，$\alpha_1=1$であり，これがプレイヤー１の均衡利得である．そして，$\varphi_1^{s_1^1}(\mu)=0$, $\varphi_1^{s_1^2}(\mu)=t$, $\varphi_1^{s_1^3}(\mu)=1-t$となるので，プレイヤー１の均衡戦略は，$\varphi_1=(0,t,1-t)$である．プレイヤー２についても同様の手順により，均衡利得$2-t$と均衡戦略$\varphi_2=(0,1)$が求められる．

次に，$\eta=(\eta_1,\eta_2)$を求める．$\eta_1^{s_1^3}$の求め方のみ具体的に示す．(4.3.2) より，

$$\eta_1^{s_1^3}=\mu_1^{s_1^3}-\varphi_1^{s_1^3}(\mu)-\sum_{h=1}^{2}\tilde{M}_1^{s_1^3}\left(s_2^h\right)\varphi_2^{s_2^h}(\mu)=(2-t)-(1-t)-\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0+\frac{1}{2}\times 1\right\}=\frac{1}{2}.$$

同様の手順により，

$$\eta_1^{s_1^1}=1,\qquad \eta_1^{s_1^2}=1,\qquad \eta_2^{s_2^1}=\frac{2}{3},\qquad \eta_2^{s_2^2}=\frac{4}{3}$$

を得る．これで，数値例３の$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$が求められたことになる．□

5．まとめ

本稿では，ナッシュ均衡点の逆算法と利得行列の分解法を示し，それらを使って利得関数空間（ゲームの集合）からナッシュ均衡対応のグラフへの同相写像を構成した．以下，本稿の結果から得られる結果および本稿の次に行なうべき事柄について簡単にまとめておく．

まず，４．１節で述べた基底ゲームと平均利得ゲームは，次のような特徴的な性質を持っている．これを命題５．１としてまとめておく．

命題５．１．(1)すべての基底ゲームには，すべてのプレイヤーが自分のもっている純戦略に等確率を割り当てる完全混合戦略均衡が存在する．

(2)すべての平均利得ゲームにおいて，各プレイヤーの最適反応は他のプレイヤーの選択する戦略に関係なく定まる．

命題５．１は，基底ゲームと平均利得ゲームの作り方から自明である．ただし，意味が分かりにくいかもしれないので，４．２節［数値例３］の表４．１の基底ゲームと平均利得ゲームを書いておこう．

表5．1．表4．1のゲームの基底ゲームと平均利得ゲーム

基底ゲーム$\tilde{\mathbf{M}}$

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	1,　4/3	−1，−1/3
s_1^2	0，−2/3	0，−1/3
s_1^3	−1/2，−2/3	1/2，　2/3

平均利得ゲームη

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	1，2/3	1，4/3
s_1^2	1，2/3	1，4/3
s_1^3	1/2，2/3	1/2，4/3

表5．1を見れば分かるように，基底ゲーム$\tilde{\mathbf{M}}$には，完全混合戦略均衡

$$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=\left(\frac{1}{3}s_1^1+\frac{1}{3}s_1^2+\frac{1}{3}s_1^3,\ \frac{1}{2}s_2^1+\frac{1}{2}s_2^2\right)$$

が存在し，平均利得ゲームηでは，各プレイヤーの純戦略最適反応対応が

$$PB_1(\sigma_2)=\{s_1^1,s_1^2\}(\forall\sigma_2\in\Delta_2),\qquad PB_2(\sigma_1)=\{s_2^2\}(\forall\sigma_1\in\Delta_1)$$

となっている．すべての標準形ゲームが，このような他のプレイヤーの戦略に依存せずにすべてのプレイヤーの最適反応が決まる2つのゲームに分解できることから何らかの結果を導きだせるかもしれない．ただし，基底ゲームと平均利得ゲームの性質については，本稿の主旨からはずれるので，詳細な分析は行なわなかった．

次に，本稿で構成した同相写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\rightarrow\mathcal{G}(\Delta^{NE})$（定義4．3）を使って次に証明すべき事柄について述べる．ゲームの集合Γ上にノルム（norm）を導入する．たとえば，最大値ノルムを導入すると，任意の2つのゲーム間の距離を測ることができるようになる．ここで，同相写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\rightarrow\mathcal{G}(\Delta^{NE})$によって$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$から$((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\sigma)$へと変換されるとき，2つのゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$と$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$は，直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在することが確かめられる．このことから，Kohberg and Mertens（1986）の Theorem 1[5]を証明することができる．Kohberg and Mertens（1986）による方法は抽象的で分かり難いが，本稿で構成した同相写像により，具体的に証明できると思われる．

参 考 文 献

Kohlberg,E. and J-F.Mertens (1986), "On the strategic stability of equilibria," *Econometrica,* 54, pp.1003 -1037.

Nash, J-F. (1951), "Non-cooperative games," *Annals of Mathematics,* 54, pp.286-295.

van Damme, E. (1987), *Stability and Perfection of Nash Equilibria,* Springer-Verlag, Berlin.

[5] Kohberg and Mertens（1986）の Theorem 1 の概要については，拙稿（2005）の脚注3で簡単に説明している．実は，Kohberg and Mertens（1986）の Theorem 1 を証明の半分は，本稿で終わっているのである．

田村一郎（1972），『トポロジー』，岩波書店.

髙尾健朗（2005），「ナッシュ均衡集合の基本構造とナッシュ写像の性質」，九州産業大学経営学会『経営学論集』，第16巻１号，pp. 1 －23.